LMD mokslo darbai, III tomas, 430–435

Apie kubinio daugianario šaknų sąlygos geometrines savybes

Artūras ŠTIKONAS (MII)
el. paštas arturass@ktl.mii.lt

Sprendžiant diferencialinį uždavinį baigtinių skirtumų metodu, būtinąsias stabilumo sąlygas galima gauti iš spektrinio stabilumo požymio, kuris įvairiems uždaviniams gali būti skirtingai formuluojamas. Jis vadinamas Neumann'o būtinąja stabilumo sąlyga arba šaknų sąlyga [5, 1]. Spektrinis stabilumo sąlyga taikoma ir tiriant skaitinio integravimo metodus (Runge-Kutta, daugiažingsniai metodai) paprastosioms diferencialinėms lygtims [1, 2, 3, 6] ir metodus lygtims su dalinėmis išvestinėmis [1]. Vadinasi, įvairiuose uždaviniuose sudaromi charakteristiniai daugianariai ir tiriama jo šaknų išsidėstymas vienetinio rutulio atžvilgiu.

1. Šaknų sąlyga

Nagrinėkime kompleksinį polinomą

$$f(z) = P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \tag{1}$$

kurio koeficientai $a_i \in \mathbb{C}$, čia $\mathbb{C}$ – kompleksinių skaičių aibė. Toks polinomas turi lygiai n šaknų $q_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$, jeigu $a_n \neq 0$. Suformuluosime šaknų sąlygą (1) daugianariui.

1 APIBRĖŽIMAS. Daugianaris P_n tenkina *šaknų sąlygą*, jeigu visos šio daugianario šaknys priklauso kompleksinės plokštumos uždarajam vienetiniam skrituliui, ir šaknys, esančios vienetinio apskritimo taškuose, nėra kartotinės.

Skirtumų metodai nestacionariesiems diferencialiniams uždaviniams dalinėmis išvestinėmis [1, 6] paprastai užrašomi dvisluoksnėmis arba trisluoksnėmis skirtumų schemomis (lygtimis). Taikant spektrinę šių schemų analizę, gaunami pirmojo $P_1(z) = bz + c$ arba antrojo laipsnio daugianariai $P_2(z) = az^2 + bz + c$, kuriems reikalinga patikrinti šaknų sąlygą. Tiesinio daugianario tyrimas nesudaro jokių sunkumų, nes tokio polinomo (kai $a_1 \neq 0$) šaknis q yra vienintelė, ir belieka patikrinti, ar ji moduliu mažesnė už vienetą. Akivaizdu, kad

$$A \equiv \{(c, b) \in \mathbb{C}^2, |q| \leqslant 1\} = \{|c| \leqslant |b|, b \neq 0\}. \tag{2}$$

1.1. *Bendrosios teoremos apie daugianario šaknis vienetiniame skritulyje*

Duotajam daugianariui $f(z)$ priskirkime jungtinį (apskritimo $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ atžvilgiu) daugianarį

$$f^*(z) = z^n \bar{f}(1/z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n = \bar{a}_0 \prod_{j=1}^{n} (z - z_j^*),$$

čia nuliai $z_k^* = 1/\bar{z}_k$ simetriški taškai daugianario $f(z)$ nuliams z_k apskritimo S atžvilgiu.

Toliau seksime Morris Marden'o "Geometry of Polynomials" [4]. Daugianariams $f(z)$ ir $f^*(z)$ apibrėšime daugianarių seką $f_j(z) = \sum_{k=0}^{n-j} a_k^{(j)} z^k$, kai $f_0(z) = f(z)$ ir

$$f_{j+1}(z) = \bar{a}_0^{(j)} f_j(z) - a_{n-j}^{(j)} f_j^*(z), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Vadinasi, $a_k^{(j+1)} = \bar{a}_0^{(j)} a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)} \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}$. Kiekvieno daugianario $f_j(z)$ narys $a_0^{(j)}$ yra realusis skaičius, kurį žymėsime

$$\delta_{j+1} = |a_0^{(j)}|^2 - |a_{n-j}^{(j)}|^2 = a_0^{(j+1)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Apie šių daugianarių nulius Cohn ir Shur įrodė lemas, kurias kompaktiškoje formoje suformulavo Marden [4].

1 lema. *Jeigu f_j turi p_j nulių vienetinio apskritimo S viduje, s_j – vienetinio apskritimo taškuose, ir jeigu $\delta_{j+1} \neq 0$, tuomet f_{j+1} turi*

$$p_{j+1} = (1/2)\Big(n - j - s_j - (n - j - s_j - 2p_j)\operatorname{sign} \delta_{j+1}\Big)$$

nulių S viduje. Dar daugiau, f_{j+1} turi tuos pačius nulius kaip f_j apskritimo S taškuose.

2 lema. *Jeigu $|a_0| < |a_n|$ tuomet daugianaris $f(z)$ turi visus nulius S viduje tada ir tik tada, kai daugianaris $f_1^*(z)$ turi visus nulius S viduje.*

Apibrėžkime skaitinę seką: $P_k = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Marden [4] taip pat įrodė teoremą:

1 teorema. *Sakykime, duotajam daugianariui $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ apibrėžta seka $f_{j+1}(z)$. Jeigu kažkuriam $k < n$, $P_k \neq 0$ sekoje P_k, bet $f_{k+1}(z) \equiv 0$, tuomet f turi $n-k$ nulius apskritime S arba simetriniuose šiam apskritimui taškuose, ir šie nuliai sutampa su daugianario $f_k(z)$ nuliais. Jei p sekos P_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, narių yra neigiami, tai f turi p papildomų nulių apskritimo S viduje ir $q = k - p$ nulių S išorėje.*

2 APIBRĖŽIMAS. Daugianaris $g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$ vadinamas *savi-atvirkštiniu*, jeigu g turi nulius tik apskritime S arba simetriniuose šiam apskritimui taškuose.

Savi-atvirkštinių daugianarių atveju f ir f^* skiriasi [4] pastoviu daugikliu u, $|u| = 1$, ir daugianario f koeficientai tenkina sąlygas:

$$b_n = u\bar{b}_0,\ b_{n-1} = u\bar{b}_1, \ldots, b_0 = u\bar{b}_n, |u| = 1.$$

Pastebėsime, kad šiuo atveju $|b_0| = |b_n|$.

Savi-atvirkštiniams daugianariams teisinga lema ir teorema [4]:

3 lema. *Jeigu g yra savi-atvirkštinis daugianaris, tuomet g' neturi nulių apskritimo S taškuose, išskyrus daugianario g kartotinius nulius.*

2 teorema. *Jeigu g yra savi-atvirkštinis daugianaris, tuomet g turi diske $|z| < 1$ tiek nulių kaip ir daugianaris*

$$g_1(z) = [g'(z)]^* = \sum_{j=0}^{n-1}(n-j)\bar{b}_{n-j}z^j,$$

t.y. g ir g' turi vienodą skaičių nulių vienetinio apskritimo S viduje.

2. Šaknų sąlyga kvadratiniam daugianariui

Sakykime, turime kvadratinį daugianarį

$$f(z) = c + bz + az^2,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0. \tag{3}$$

Darbe [7] buvo suformuluotas šaknų sąlygos kriterijus tokiam daugianariui.

3 teorema. *Kompleksinis kvadratinis daugianaris* (3) *tenkina šaknų sąlygą, jeigu jo koeficientai priklauso aibei*

$$\{|c|^2 + |\bar{a}b - \bar{b}c| \leqslant |a|^2,\ |b| < 2|a|\}. \tag{4}$$

1 pastaba. Jeigu mus domina silpnesnė sąlyga, kurioje S taškuose šaknys gali būti kartotinės, tuomet (4) išraiškoje griežtąją nelygybę $|b| < 2|a|$ reikia pakeisti nelygybe $|b| \leqslant 2|a|$ nes kartotinę šaknį ($q_1 = q_2$) S taškuose turėsime, kai daugianario koeficientai priklauso aibei

$$\{|c| = |a|,\ \bar{a}b = \bar{b}c,\ |b| = 2|a|\}. \tag{5}$$

Abi šaknys yra S viduje, kai daugianario koeficientai priklauso aibei

$$\{|c|^2 + |\bar{a}b - \bar{b}c| < |a|^2\}. \tag{6}$$

Įrodymas. Įrodysime šiuos teiginius, kai $a = 1$, nes bendrasis atvejis su $a \neq 0$ lengvai susiveda į atvejį $a = 1$.

Pirmiausia surasime koeficientų aibę, kada abi šaknys yra S viduje. Jeigu (3) yra nagrinėjamasis daugianaris su $a = 1$, tuomet apibrėžkime daugianarius

$$f^*(z) = 1 + \bar{b}z + \bar{c}z^2, \tag{7}$$

$$f_1(z) = B + \bar{C}z, \quad C = \bar{b}c - b, \quad B = \delta_1 = |c|^2 - 1 \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$f_1^*(z) = C + Bz, \tag{9}$$

$$f_2(z) = \delta = \delta_1 = |B|^2 - |C|^2, \tag{10}$$

bei (3) daugianario išvestinę

$$g(z) = f'(z) = b + 2z, \; g^*(z) = 2 + bz. \tag{11}$$

Iš Vijetos teoremos: $|c| = |q_1 q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$, todėl $|c| \leqslant 1$. Jeigu $|c| = 1$, tuomet $|q_1| \cdot |q_2| = 1$, ir šiuo atveju būtinai $|q_1| = |q_2| = 1$. Vadinasi, lieka atvejis $|c| < 1$, o tada teisinga 2 lema. Patikriname, kada tiesinio daugianario f_1^* šaknis yra S viduje: $|C| < |B|$.

Ištirsime atvejį, kuomet S taške yra kartotinė šaknis (diskriminantas $D = 0$). Akivaizdu, kad $|c| = 1$. Šiuo atveju, f išvestinė g turės nulį apskritime S, jei $|b| = 2$, ir

$$\bar{b}c - b = -\frac{b^2 - |b|^2 c}{b} = -\frac{b^2 - 4c}{b} = -\frac{D}{b} = 0,$$

t.y. daugianario f koeficientai priklauso (5) aibei.

Atvirkščiai, jeigu daugianario f koeficientai priklauso (5) aibei, tuomet daugianaris f – saviatvirkštinis su $u = c$:

$$|u| = 1, \; 1 = u\bar{c}, \; b = u\bar{b}, \; c = u \cdot 1,$$

ir turi kartotinę šaknį:

$$D = b^2 - 4c = b\bar{b}c - 4c = |b|^2 c - 4c = 4c - 4c = 0,$$

kuri šiuo atveju priklauso S. Pastaba pilnai įrodyta. Belieka ištirti atvejį, kuomet abi šaknys priklauso vienetiniam uždarajam skrituliui $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1.\}$

Daugianario $f\big((1+\varepsilon)z\big) = c + (1+\varepsilon)bz + (1+\varepsilon)^2 z^2$, čia $\varepsilon > 0$, visos šaknys bus S viduje tada ir tik tada, kai f šaknys bus apskritimo $S_{1+\varepsilon} = \{z : |z| < 1 + \varepsilon\}$ viduje. Išrašę (6) sąlygą šiam daugianariui, turime

$$|c|^2 + (1+\varepsilon)|(1+\varepsilon)^2 b - \bar{b}c| < |(1+\varepsilon)^2|^2. \tag{12}$$

Jeigu $|c| < 1$, tuomet riboje, kai $\varepsilon \to 0$, gauname sąlygą

$$|c|^2 + |b - \bar{b}c| \leqslant 1, \tag{13}$$

o jeigu $|c| = 1$, tuomet perrašome (12) nelygybę pavidalu

$$(1+\varepsilon)|(1+\varepsilon)^2 b - \bar{b}c| < 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4. \tag{14}$$

Jeigu $b = 0$, tuomet ši nelygybė teisinga visiems $|c| = 1$, o jeigu $b \neq 0$, $b \neq \bar{b}c$, tai pakankamai mažiems $\varepsilon > 0$ šios nelygybės netenkina joks $|c| = 1$. Jeigu $b \neq 0$, bet $b = \bar{b}c$, tuomet

$$|b| < \frac{4 + 6\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)},$$

ir riboje gauname sąlygą $|b| \leqslant 2$.

Vadinasi, jeigu abi šaknys priklauso D_1, tuomet daugianario koeficientai priklauso aibei

$$\{|c| < 1, |C| \leqslant |B|\} \cup \{|c| = 1, b = \bar{b}c, |b| \leqslant 2\}. \tag{15}$$

Įrodysime, kad šios sąlygos yra pakankamos. Pirmajame (15) poaibyje $\delta_1 = |c|^2 - 1 < 0$, $\delta_2 = 0$, todėl $P_1 < 0$, $f_2 \equiv 0$, ir iš 1 teoremos turėsime vieną šaknį S viduje, o kitą S taške. Antrojo poaibio atveju turime savi-atvirkštinį daugianarį, kurio išvestinė turi vienintelę šaknį $q = -b/2$. Jeigu $|b| \leqslant 2$, tuomet $q \in D_1$, t.y. g neturi šaknų D_1 išorėje. Remiantis 2 teorema, D_1 išorėje nebus ir f šaknų. Teorema įrodyta.

3. Šaknų sąlyga kubiniam daugianariui

Nagrinėkime kubinį daugianarį

$$f(z) = c + bz + az^2 + dz^3, \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \ d \neq 0. \tag{16}$$

Apibrėžkime daugianarių seką:

$$\begin{aligned}
f^*(z) &= \bar{d} + \bar{a}z + \bar{b}z^2 + \bar{c}z^3, \quad A = |c|^2 - |d|^2 \in \mathbb{R}, \ B = c\bar{b} - a\bar{d}, \ C = c\bar{a} - b\bar{d},\\
f_1(z) &= A + \bar{B}z + \bar{C}z^2, \ f_1^*(z) = C + Bz + Az^2,\\
f_2(z) &= |A|^2 - |C|^2 + (A\bar{B} - B\bar{C})z, \ f_2^*(z) = A\bar{B} - B\bar{C} + (|A|^2 - |C|^2)z,\\
f_3(z) &= (|A|^2 - |C|^2)^2 - |A\bar{B} - B\bar{C}|^2.
\end{aligned}$$

Savi-atvirkštinį daugianarį turėsime, kai $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Kartodami šaknų sąlygos tyrimą (kvadratiniam daugianariui), gauname šaknų išsidėstymo kriterijus.

1) Visos daugianario šaknys yra apskritimo S viduje, jei jo koeficientai priklauso aibei

$$A_0 = \{|C|^2 + |B\bar{A} - C\bar{B}| < |A|^2\};$$

2) Visos daugianario šaknys yra diske D_1, jei jo koeficientai priklauso aibei

$$\begin{aligned}
A_D = {} & \{A < 0, \ |C|^2 + |B\bar{A} - C\bar{B}| \leqslant |A|^2\}\\
& \cup \{A = 0, \ B = 0, \ |b|^2 + 2|3a\bar{d} - b\bar{a}| \leqslant 9|d|^2\};
\end{aligned}$$

3) Jeigu daugianario koeficientai priklauso aibei

$$\begin{aligned} A_1 = & \{A < 0,\ |C| = |A|,\ A\bar{B} = B\bar{C},\ |B| = 2|A|\} \\ & \cup\{A = 0,\ B = 0,\ |b|^2 + 2|3a\bar{d} - b\bar{a}| = 9|d|^2\}, \end{aligned}$$

tuomet yra kartotinė šaknis apskritimo S taške;

4) Jeigu daugianario koeficientai priklauso aibei

$$A_2 = \{A = 0,\ B = 0,\ 3a\bar{d} = b\bar{a}\},$$

tuomet yra vienintelė kartotinė šaknis apskritimo S taške.

Surinkę šaknų sąlygai tinkamus poaibius gauname pagrindinį rezultatą, kurį suformuluosime kaip teoremą.

4 teorema. *Kompleksinis kvadratinis daugianaris* (16) *tenkina šaknų sąlygą, jeigu jo koeficientai priklauso aibei*

$$\begin{aligned} A_R = & \{A < 0,\ |C|^2 + |B\bar{A} - C\bar{B}| \leqslant |A|^2\} \\ & \cup\{A = 0,\ B = 0,\ |b|^2 + 2|3a\bar{d} - b\bar{a}| < 9|d|^2\} \\ & \setminus\{A < 0,\ |C| = |A|,\ A\bar{B} = B\bar{C},\ |B| = 2|A|\}. \end{aligned}$$

Literatūra

[1] N.S. Bachvalov, N.P. Zhidkov, and G.M. Kobelkov, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow (1987) (in Russian).

[2] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, Springer Series in Computional Mathematics 8. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1987).

[3] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Series in Computional Mathematics 14. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1991).

[4] M. Marden, *Geometry of polynomials*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2nd edition (1966).

[5] R.D. Richtmayer and K.W. Morton, *Difference methods for initial value problems*, Interscience Publishers, New York (1967).

[6] A.A. Samarskii and A.V. Goolin, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow (1989) (in Russian).

[7] A. Štikonas, The root condition for polynomial of the second order and a spectral stability of finite-difference schemes for Kuramoto-Tsuzuki equations, *Mathematical Modelling and Analysis*, **3**, 214 – 226 (1998).

About the geometrical properties of the root condition for the third order polinomials

A. Štikonas

This paper deals with a root condition for polynomial of the second and third order. We prove the root criterion for such polynomial with complex coefficients and find regions for the root condition in the special coefficients' phase space.