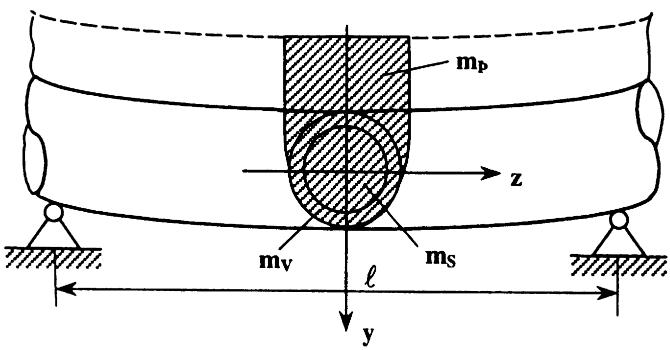
LMD mokslo darbai, III tomas, 444–449
© Matematikos ir informatikos institutas, 1999

Vamzdžio su tekančiu skysčiu įlinkio ir įtempimų skaičiavimas kintamos grunto apkrovos atveju

Rimantas DIDŽGALVIS (KŽŪU), Antanas SUDINTAS, Irena TIKNEVIČIENĖ (KTU)

Eksploatuojant požeminius magistralinius vamzdynus, kuriais transportuojama nafta, sutinkami atvejai, kada karstinėse grunto zonose staigiai susiformuoja požeminės įgriuvos. Jų pasekoje gana ilga vamzdyno atkarpa netenka pagrindo – atramos. Staigiai praradęs atramą ir apkrautas žemės sluoksnio (iki 1 m storio), vamzdis yra paveikiamas impulsinės jėginės apkrovos. Jos įtakoje neišsvertas atkarpoje ℓ vamzdis atlieka skersinius gęstančius svyravimus y koordinatės kryptimi (1 pav.).



1 pav. Apkrauto gruntu vamzdžio įlinkio ir skerspjūvio schema inercijos momentui I_{SK} skaičiuoti.

Tokie svyravimai gali sukelti pavojingus įtempimus vamzdžio sienelėse. Šio darbo tikslas yra apskaičiuoti atsirandančius vamzdžio sienelės normalinius įtempimus, įvertinant grunto, esančio ant vamzdžio, svorį ir šio svorio kitimą dėl nubyrėjimo vamzdžio svyravimų metu.

Atskiras šio uždavinio sprendimo atvejis, kada nėra įvertinamas nubyrančio žemės sluoksnio poveikis vamzdžio svyravimams, yra pateiktas darbe [1]. Šiame darbe tas poveikis yra įvertintas.

Žemės sluoksnio nubyrėjimą nuo vamzdžio įgriuvos ir virpesių atveju galime apibūdinti kaip tam tikrą determinuotą procesą, atitinkantį išraišką $\xi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, apibrėžtą laiko intervale $[0, T]$, kur λ – koeficientas, sąlygojamas grunto reologinių (šlapios trinties, frakciškumo) savybių. Pažymėtina, kad laikui kintant nuo $t = 0$ iki $t = T$, funkcijos $\xi(t)$ reikšmės keisis pusiau atvirame intervale $[1; 0[$ mažėjimo kryptimi.

Vamzdžio svyravimų diferencialinę lygtį užrašysime, pasinaudoję stygos svyravimų lygtimi [1]:

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = M; \tag{1}$$

čia

E – tamprumo modulis;

I – inercijos momentas;

M – lenkimo momentas.

Išdiferencijavus (1) lygtį du kartus pagal z, gauname:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q\,(z,t) \tag{2}$$

Mūsų atveju $q(z,t)$ – išskirstyta apkrova, kurią sudaro skysčio, tekančio vamzdžiu, jėga, vamzdžio ir nubyrančio grunto inercijos jėgos ir nubyrančio grunto vamzdžio virpesius slopinanti jėga, susidaranti dėl grunto reologinių savybių.

$$\begin{aligned} q\,(z,t) &= -h\xi\ (t)\ \frac{\partial y}{\partial t} - (m_V + m_{\check{z}}\xi(t)\,)\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ &\quad - m_{SK}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + \omega^2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Įvertindami grunto mechanines savybes, galime daryti prielaidą, kad vamzdžio inercijos momentas nubyrant nuo jo gruntui kinta pagal šį dėsnį:

$$I = I_{VS} + I_{\check{z}} \cdot \xi\,(t)\,. \tag{4}$$

Simboliai (3) ir (4) išraiškose apibūdinami taip:

I_{VS} – užpildyto skysčiu vamzdžio inercijos momentas;

m_Z – grunto sluoksnio ant vamzdžio ilgio vieneto momentu $t = 0$ masė;

m_V – vamzdžio ilgio vieneto masė;

ω – skysčio greitis;

m_{SK} – skysčio, tenkančio vamzdžio ilgio vienetui, masė;

h – grunto klampumo koeficientas, $h = g\ (\lambda)$;

$I_{\check{z}}$ – grunto sluoksnio, esančio ant vamzdžio skerspjūvio, inercijos momentas.

Įstačius (3), (4), ir $\xi\,(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ į (2), vamzdžio svyravimų lygtis užrašoma taip:

$$\begin{aligned} E\left(I_{VS} + I_{\check{z}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + h\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\partial y}{\partial t} + \left(m_V + m_{\check{z}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ + m_{SK}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + \omega^2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Sprendinys $y(z,t)$ tenkina pradines sąlygas

$$y(z,0) = 0; \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta_0(z); \tag{6}$$

ir kraštines sąlygas

$$y(0,t) = y(l,t) = 0,$$
$$\left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{z=\ell} = 0. \tag{7}$$

(5) lygties sprendinį ieškosime pavidalo

$$y = \sin\frac{\pi z}{\ell} \cdot f(t). \tag{8}$$

Jis tenkina (7) kraštines sąlygas. (5) lygtį sprendžiame Galerkino-Bubnovo metodu. Sprendinį (8) įstatome į (5) lygtį ir padauginę iš $\sin\frac{\pi z}{\ell} \cdot f(t)$ integruojame nuo 0 iki ℓ pagal kintamąjį z. Gauname diferencialinę lygtį funkcijai $f(t)$ apskaičiuoti:

$$\begin{aligned}&\left(m_V + m_{SK} + m_{\check{z}}e^{-\lambda t}\right)\ddot{f} + he^{-\lambda t}\dot{f}\\&+\left(\frac{\pi^4}{\ell^4}EI_{vs} + \frac{\pi^4}{\ell^4}EI_{\check{z}}e^{-\lambda t} - \frac{\pi^2}{\ell^2}m_{SK}\omega^2\right)f = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Lygties sprendinys $f(t)$ tenkina pradines sąlygas:

$$f(0) = 0; \quad \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = \dot{f}_0; \tag{10}$$

Lygties integravimui yra patogu jos kintamus koeficientus užrašyti polinomų pavidale. Todėl atliekame pakeitimą:

$$x = e^{-\lambda t}; \quad \dot{x} = -\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda x. \tag{11}$$

Tada

$$\dot{f} = f'_x \cdot \dot{x} = -\lambda x f'; \quad \ddot{f} = -\lambda\dot{x}\left(f' + xf''\right) = \lambda^2 x f' + \lambda^2 x^2 f''. \tag{12}$$

Čia

$$' = \frac{d}{dx}.$$

Į Įstačius pakeitimą į (9) lygtį, gauname:

$$r(x)\ f'' + u(x)\ f' + v(x)\ f = 0; \tag{13}$$

$$\begin{aligned}r(x) &= \lambda^2 x^2 \left(m_V + m_{SK} + m_{\check{z}}x\right);\\u(x) &= \lambda x\ \left(\lambda m_V + \lambda m_{SK} + \lambda m_{\check{z}}x - hx\right);\\v(x) &= \frac{\pi^4}{\ell^4}EI_{VS} + \frac{\pi^4}{\ell^4}EI_{\check{z}}X - \frac{\pi^2}{\ell^2}m_{SK}\,\omega^2.\end{aligned}$$

Pradinės sąlygos bus tokios:

$$f\Big|_{x=1} = 0; \quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=1} = -\frac{\dot{f}_0}{\lambda} = q_0, \tag{14}$$

(13) lygties koeficientus išskleidžiame Teiloro eilute taško $x_0 = 1$ aplinkoje:

$$\begin{aligned} r(x) &= r(1) + r'(1)(x-1)) + \frac{r''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{r'''(1)}{3!}(x-1)^3; \\ u(x) &= u(1) + u'(1)(x-1) + \frac{u''(1)}{2!}(x-1)^2; \\ v(x) &= v(1) + v'(1)(x-1). \end{aligned} \tag{15}$$

Čia:

$$\begin{aligned} r(1) &= \lambda^2 \left(m_V + m_{SK} + m_{\check{Z}}\right); \\ r'(1) &= \lambda^2 \left(2m_V + 2m_{SK} + 3m_{\check{Z}}\right); \\ r''(1) &= 2\lambda^2 \left(m_V + m_{SK} + 3m_{\check{Z}}\right); \\ r''(1) &= 6\lambda^2 m_{\check{Z}}; \\ u(1) &= \lambda^2 \left(m_V + m_{SK} + m_{\check{Z}}\right) - \lambda h; \\ u'(1) &= \lambda^2 \left(m_V + m_{SK} + 2m_{\check{Z}}\right) - 2\lambda h; \\ u''(1) &= 2\lambda \left(\lambda m_{\check{Z}} - h\right); \\ v(1) &= \frac{\pi^4}{\ell^4} E \left(I_{VS} + I_{\check{Z}}\right) - \frac{\pi^2}{\ell^2} m_{SK}\omega; \\ v'(1) &= \frac{\pi^4}{\ell^4} E I_{\check{Z}}. \end{aligned}$$

(15) eilutės konverguoja visiems $x \in]0,1]$, todėl Koši teoremos [2] pagrindu galime tvirtinti, kad egzistuoja vienintelis (13) diferencialinis lygties sprendinys, tenkinantis (14) pradines sąlygas, kurį galime išskleisti Teiloro eilute taško $x_0 = 1$ aplinkoje, konverguojančia visoms kontamojo x reikšmėms intervale]0;1]:

$$(t) = q_0(x-1) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k (x-1)^k. \tag{16}$$

Apskaičiuojame $f'(t)$ ir $f''(t)$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= q_0 + \sum_{k=2}^{\infty} C_k (x-1)^{k-1}; \\ f''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(x-1)^{k-2}. \end{aligned} \tag{17}$$

(13) lygties sprendinį ieškome taip: į lygtį įrašome (15), (16), (17) išraiškas. Kairėje lygties (13) pusėje surinktus koeficientus prie įvairių $x-1$ laipsnių prilyginame nuliams. Gautos rekurentinės

formulės koeficientams C_k apskaičiuoti užrašomos taip:

$$\begin{aligned}
C_{n+4} = &-\frac{1}{(n+4)(n+3)r(1)}\bigg[\Big(v'(1)+\frac{1}{2}(n+1)u'(1)+\frac{1}{6}n(n+1)r''(1)\Big)\\
&\times C_{n+1}+\Big(v(1)+(n+2)u'(1)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)r''(1)\Big)C_{n+2}\\
&+\Big((n+3)u(1)+(n+2)(n+3)r'(1)\Big)C_{n+3}\bigg]; \quad (n=1;2;3;\ldots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{1}{2}\frac{q_0\cdot u(1)}{r(1)};\\
C_3 &= -\frac{1}{6r(1)}\Big[v(1)q_0+q_0u'(1)+2\big(u(1)+r(1)\big)C_2\Big];\\
C_4 &= -\frac{1}{12r(1)}\Big[q_0v'(1)+\frac{1}{2}q_0u''(1)+\big(v(1)+2u'(1)+r''(1)\big)C_2\\
&\quad+\big(3u(1)+6r'(1)\big)C_3\Big].
\end{aligned}$$

(5) diferencialinės lygties sprendinys ir jo antroji išvestinė $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ bus:

$$y=\left[q_0\Big(e^{-\lambda t}-1\Big)+\sum_{k=2}^{\infty}C_k\Big(e^{-\lambda t}-1\Big)^k\right]\sin\frac{\pi z}{\ell};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=-\frac{\pi^2}{\ell^2}\left[q_0\Big(e^{-\lambda t}-1\Big)+\sum_{k=2}^{\infty}C_k\Big(e^{-\lambda t}-1\Big)^k\right]\sin\frac{\pi z}{\ell}.$$

Vamzdžio lenkimo momentas:

$$M=\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}E\Big(I_{VS}+I_{\check{z}}e^{-\lambda t}\Big).$$

Maksimalus normalinis įtempimas kuriame nors vamzdžio atkarpos galo taške $z=\ell_0$ yra apskaičiuojamas taip:

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W};$$

kur W – atsparumo momentas,

$$W=\frac{I}{y}.$$

Išvada. Sudarytas vamzdžio su tekančiu skysčiu svyravimų staigių žemės grunto įgriuvų atveju matematinis modelis. Apytiksliais diferencialinės lygties sprendimo metodais gauta analitinė dinaminio vamzdžio įlinkio, veikiant kintamai grunto apkrovai, išraiška. Pasinaudojant čia išraiška ir žinant grunto mechanines – reologines charakteristikas, įgriuvos ilgį, skysčio greitį vamzdyje, galima žymiai tiksliau apskaičiuoti dinamines deformacijas. Užsiduodant dinaminio įlinkio duomenis, galima tiksliau apskaičiuoti normalinius sienelės įtempimus ir prognozuoti vamzdžio resursą.

Literatūra

[1] R. Didžgalvis, A. Sudintas, Vamzdžių su tekančiu skysčiu įlinkio ir normalinių įtempimų skaičiavimas staigios skersinės apkrovos atveju, *Lietuvos matematikų draugijos XXXVIII konferencijos medžiaga*, Vilnius (1998).

[2] Н.М. Матвеев, *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным управнениям*, Высшая школа, Минск (1967).

Calculation of bending deflection and stresses of a pipe with flowing fluid in the case of variable ground load

R. Didžgalvis, R. Sudintas, I. Tiknevičienė

The mathematical model of the oscillations of fulfilled pipe is formed on the case when that pipe suddenly losses the support. Using the methods of approximate solutions of differential equations, the analytical pipe bend dynamic expressions were given at the case, when the ground load minimises exponentially. Finally, those solutions could be used for the finding more exact normal tensions in the wall of the pipes, when the reological parameters of the ground are determined.