LMD mokslo darbai, 69–75
1998, Vilnius

Diofantinių artinių teorema

Vilius Stakėnas* **(VU)**

Įvadas. Klasikinė Hurwitz'o teorema tvirtina, kad bet kokiam iracionaliajam α atsiras be galo daug nesuprastinamų trupmenų m/n, kad

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}n^2}.$$

Šios teoremos neįmanoma patikslinti, t. y. pakeitus konstantą $\sqrt{5}$ didesne, atsiras iracionaliųjų skaičių (pavyzdžiui, „auksinio pjūvio" skaičius $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$), kuriems teiginys nebebus teisingas.

Kartais iracionaliųjų skaičių aproksimavimo racionaliaisiais uždavinys nagrinėjamas, formuluojant sąlygas ne tik aproksimacijos tikslumui, bet ir reikalaujant kokių nors artinių savybių. Pavyzdžiui, reikalaujama, kad m, n būtų pirminiai [1], bekvadračiai skaičiai [2,3] ir t. t.

Šiame darbe diofantiniams artiniams specializuoti naudosime sąlygą $f(m/n) = a$, čia $f\colon\ Q_+ \to G$, multiplikacinė funkcija, apibrėžta racionaliųjų skaičių aibėje ir įgyjanti reikšmes kokioje nors komutatyvioje pusgrupėje su vienetiniu elementu e, t. y. su visais poromis tarpusavyje pirminiais m_1, n_1, m_2, n_2 tenkinanti sąlygą

$$f\left(\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}\right) = f\left(\frac{m_1}{n_1}\right) f\left(\frac{m_2}{n_2}\right).$$

Su multiplikacine funkcija f susiekime aibę

$$P_f = \{p\colon\ f(p) \neq e, \text{arba } f(p^{-1}) \neq e\},$$

čia kaip ir kitur p žymi pirminius skaičius.

Tarkime eilutė

$$\sum_{p\in P_f} \frac{1}{p} \tag{1}$$

konverguoja. Tada galima įrodyti (žr. [5]), kad kiekvienai f reikšmei a egzistuoja teigiama konstanta $c(a)$ tokia, bet kokiam skaičiui $\alpha > 0$ atsiras be galo daug trupmenų m/n, kurioms su $\varphi(n) = c(a)/n$ bus teisinga

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \varphi(n), \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = a. \tag{2}$$

*Mokslinį darbą remia Lietuvos Mokslo ir Studijų fondas.

Iracionaliesiems skaičiams šį teiginį galima žymiai patikslinti, pareikalavus, kad aibė P_f būtų „reta" (žr. [4]). Tikėtina, kad funkcijoms, tenkinančioms (1) ir visiems iracionaliesiems $\alpha > 0$ teiginys (2) teisingas su funkcija

$$\varphi(n) = \frac{1}{n^{1+\theta}}, \qquad \theta \in (0; 2/3);$$

t.y. tikslumas tas pats, kaip aproksimuojant iracionaliuosius skaičius trupmenomis, sudarytomis iš bekvadračių skaičių, žr. [3]. Šiame darbe įrodoma teorema garantuoja tokį tikslumą, jei

$$\#(P_f \cap [2; x]) = o\Big(\frac{x^{1/3}}{\log x}\Big), \qquad x \to \infty.$$

TEOREMA. *Tegu* $\theta \in (0; 2/3)$ *ir multiplikacinė funkcija* f *tenkina sąlygą*

$$\#(P_f \cap [2; x]) = o\Big(\frac{x^{1-\theta}}{\log x}\Big), \qquad x \to \infty.$$

Tada bet kokiam iracionaliajam $\alpha > 0$ *ir* f *reikšmei* a *atsiras be galo daug racionaliųjų skaičių tenkinančių sąlygas*

$$\Big|\alpha - \frac{m}{n}\Big| < \frac{1}{n^{1+\theta}}, \qquad f\Big(\frac{m}{n}\Big) = a.$$

Įrodymas. Su pirminių skaičių aibe Q apibrėžkime multiplikacinę funkciją $\lambda(m, Q)$

$$\lambda(p^\alpha, Q) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p \notin Q, \\ 0, & \text{jei } p \in Q. \end{cases}$$

Teorema išplaukia iš tokio teiginio.

LEMA 1. *Tegu* $\theta \in (0; 2/3)$, $c > 0$, *ir aibei* Q *teisingas įvertis*

$$\#(Q \cap [2; x]) = o\Big(\frac{x^{1-\theta}}{\log x}\Big), \qquad x \to \infty. \tag{3}$$

Tada bet kokiam iracionaliajam $\alpha > 0$ *atsiras be galo daug racionaliųjų skaičių, tenkinančių sąlygas*

$$\Big|\alpha - \frac{m}{n}\Big| < \frac{c}{n^{1+\theta}}, \qquad \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1.$$

Šioje lemoje ir kitur μ reiškia Miobuso funkciją. Tarkime racionaliajam skaičiui k/l teisinga $f(k/l) = a$. Sudarykime aibę

$$Q = P_f \cup \{p\colon\ p|kl\}.$$

Tada aibė Q tenkina (3) sąlygą. Imdami $c = k^{-1}l^{-\theta}$ ir pasirėmę 1 lema, gauname, kad egzistuoja be galo daug racionaliųjų m/n, kuriems

$$\left|\frac{l}{k}\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{n^{1+\theta}}, \quad \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1.$$

Tačiau tada

$$\left|\alpha - \frac{km}{ln}\right| < \frac{1}{(ln)^{1+\theta}}, \quad f\left(\frac{km}{ln}\right) = a.$$

Taigi pakanka įrodyti 1 lemą. Savo ruožtu ji išplaukia iš tokio teiginio.

Tegu a/q kokia nors nesuprastinama trupmena, $A > 0$ – bet kokia konstanta. Jeigu q yra pakankamai didelis, tai atsiras trupmena m/n, tenkinanti sąlygas

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \quad \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1, \quad Aq^{2/(1+\theta)} \leqslant n \leqslant 2Aq^{2/(1+\theta)}. \tag{4}$$

Tarkime, (4) teiginys teisingas. Tada imdami iracionaliojo skaičiaus α grandininės trupmenos reduktus a/q su pakankamai dideliais vardikliais ir (4) sąlygą tenkinančius artinius, gautume

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| + \left|\frac{a}{q} - \frac{m}{n}\right| < \frac{2}{q^2} < \frac{2(2A)^{1+\theta}}{n^{1+\theta}}.$$

Lema būtų įrodyta.

Įrodysime (4) teiginį. Pažymėkime $N = Aq^{2/(1+\theta)}$, $L = N/q$. Tada (4) teiginys būtų teisingas, jei atsirastų sveikųjų skaičių trejetas $\langle m, n, l\rangle$, tenkinantis sąlygas

$$mq - an = l, \quad N \leqslant n \leqslant 2N, \quad 1 \leqslant l \leqslant L, \tag{5}$$

ir $I_Q(m, n) = \mu^2(m)\mu^2(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) = 1$. Tarkime, S_q yra visų trejetų, tenkinančių (5) sąlygas, aibė. Įrodysime, kad

$$T_q = \sum\{I_Q(m, n)\colon \langle m, n, l\rangle \in S_q\} > 0.$$

Pažymėkime

$$Q_z = \prod\{p\colon\ p \leqslant z, p \in Q\}, \quad P_z = \prod_{p \leqslant z} p.$$

Iš akivaizdžių nelygybių

$$\mu^2(m) \geqslant \sum\{\mu(d)\colon\ d^2|m, d|P_z\} - \sum\{1\colon\ p > z, p^2|m\},$$

$$\lambda(m, Q) \geqslant \lambda(m, Q_z) - \sum\{1\colon\ p > z, p \in Q, p|m\}$$

gauname

$$I_Q(m, n) \geqslant f(m)f(n)\lambda(m, Q)\lambda(n, Q) - r_1(m) - r_1(n) - r_2(m) - r_2(n),$$

čia pažymėjome

$$f(m)=\sum\{\mu(d)\colon\ d^2|m,\ d|P_z\},$$

$$r_1(m)=\sum\{1\colon\ p>z,\ p^2|m\},\quad r_2(m)=\sum\{1\colon\ p>z,\ p\in Q,\ p|m\}.$$

Tada

$$T_q\geqslant U-R_{11}-R_{12}-R_{21}-R_{22},\tag{6}$$

čia

$$U=\sum_{\langle m,n,l\rangle\in S_q}f(m)f(n)\lambda(m,Q)\lambda(n,Q),$$

$$R_{11}=\sum_{\langle m,n,l\rangle\in S_q}r_1(m),\quad R_{21}=\sum_{\langle m,n,l\rangle\in S_q}r_2(m),$$

R_{12} ir R_{22} yra analogiškos reikšmių $r_1(n), r_2(n)$ sumos.

Pasinaudosime sumų R_{11}, R_{12} įverčiais, gautais Heath-Brown'o darbe [3]. Šiame darbe sumos įvertintos, kai $N=q^{2/(1+\theta)}$. Tie patys samprotavimai tinka ir atveju $N=Aq^{2/(1+\theta)}$. Jei $\theta<2/3$, tai

$$R_{11}+R_{12}\ll\frac{NL}{q\log\log q}.\tag{7}$$

Natūraliųjų skaičių a,b,c bendrą didžiausią daliklį žymėsime (a,b,c). Dydžius R_{21}, R_{22} vertinsime pasinaudodami šiuo teiginiu.

LEMA 2 ([3], Lema 3). *Tegu* v_1,v_2,v_3 *– sveikieji skaičiai,* $(v_1,v_2,v_3)=1$, $X_1,X_2,X_3>0$. *Tada lygties*

$$v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0$$

sprendinių sveikaisiais skaičiais x_1,x_2,x_3 *su sąlyga* $|x_i|\leqslant X_i$, $(x_1,x_2,x_3)=1$, *kiekis neviršija*

$$4+12\pi\frac{X_1X_2X_3}{\max\{|v_i|X_i\colon\ i=1,2,3\}}.$$

Įvertinsime tik sumą R_{22}, nes kita suma vertinama analogiškai. Kaip ir [3] straipsnyje dalysime S_q į poaibius pagal $d=(m,n,l)$ reikšmes. Vieno trejeto $\langle m,n,l\rangle$ įnašas į R_{22} yra nedidesnis už n skirtingų pirminių daliklių skaičių, kuris savo ruožtu vertinamas dydžiu $O(\log q/\log\log q)$, taigi

$$\begin{aligned}R_{22}&\ll\frac{\log q}{\log\log q}\sum\{1\colon\ \langle m,n,l\rangle\in S_q,\ d=(m,n,l)>z\}\\&\quad+\sum\{1\colon\ \langle m,n,l\rangle\in S_q,\ d=(m,n,l)<z,\ z<p<2N,\ p\in Q,\ p|n\}\\&=R_{21}^*+R_{22}^*.\end{aligned}$$

Pirmąją sumą vertiname kaip [3] (žymėsime x_1, x_2, x_3 skaičius, kuriems $(x_1, x_2, x_3) = 1$):

$$\sum_{\substack{(m,n,l)\in S_q\\ d=(m,n,l)>z}} 1: \leqslant \sum_{d\geqslant z} \#\left\{\langle x_1, x_2, x_3\rangle:\ qx_1 - ax_2 - x_3 = 0,\ |x_2| \leqslant \frac{2N}{d},\ |x_3| \leqslant \frac{L}{d}\right\}. \tag{8}$$

Kadangi $|qx_1| \leqslant |ax_2| + |x_3| \ll N/d$, tai $|x_1| < cNq/d$.

Dabar (8) sumos dėmenį įvertinę 2 lemos dydžiu ($X_1 = cNq/d, X_2 = 2N/d, X_3 = L/q, v_1 = q, v_2 = -a, v_3 = -1$) gausime ($z = \log q$)

$$R^*_{21} \ll \frac{\log q}{\log\log q} \sum_{d\geqslant z} \frac{NL}{qd^2} \ll \frac{LN}{q\log\log q}. \tag{9}$$

Įvertinsime R^*_{22}; kadangi $p \nmid d$ ir $p|n$, tai $m = x_1 d, n = x_2 pd, l = x_3 d$ ir

$$R^*_{22} \ll \sum_{\substack{z\leqslant p\leqslant 2N\\ p\in Q}} \sum_{d<z} \#\left\{\langle x_1, x_2, x_3\rangle:\ qx_1 - apx_2 - x_3 = 0,\ |x_2| \leqslant \frac{2N}{dp},\ |x_3| \leqslant \frac{L}{d}\right\}.$$

Vėl panaudoję 2 lemą su tais pačiais X_i ir $v_1 = q, v_2 = -ap, v_3 = -1$, gausime

$$R^*_{22} \ll \sum\left\{\left(1 + \frac{LN}{qpd^2}\right):\ z < p < 2N,\ p\in Q,\ d < z\right\}$$
$$\ll \sum\{z:\ p < 2N,\ p \in Q\} + \frac{LN}{q}\sum\left\{\frac{1}{p}:\ p > z,\ p\in Q\right\}.$$

Kadangi $LN/q = A^2 q^{2(1-\theta)/(1+\theta)}$, tai pasinaudoję sąlyga aibei Q, gausime

$$\sum\{z:\ p < 2N,\ p\in Q\} = o\left(\log q \cdot \frac{q^{\frac{2(1-\theta)}{1+\theta}}}{\log q}\right) = o\left(\frac{LN}{q}\right).$$

Be to

$$\sum\left\{\frac{1}{p}:\ p > z,\ p \in Q\right\} = o(1), \quad q \to \infty,$$

taigi $R^*_{22} = o(NL/q)$. Iš (7), (9) matome, kad šis įvertis teisingas visoms sumoms R_{ij}. Tada

$$T_q \geqslant U + o\left(\frac{LN}{q}\right),$$

ir teorema bus įrodyta, jei nustatysime, kad $U \gg LN/q$.

Sumažinkime sandaugą P_z išmesdami pirminius daugiklius $p \in Q_z$: $P^*_z = P_z/(P_z, Q_z)$, tada $(P^*_z, Q_z) = 1$. Apibrėžkime

$$f^*(m) = \sum\{\mu(d):\ d^2|m,\ d|P^*_z\},$$

tada

$$f(m)\lambda(m, Q_z) = f^*(m)\lambda(m, Q_z),$$

nes abi pusės sutampa, kai $(m, Q_z) = 1$ ir virsta nuliais, kai $(m, Q_z) > 1$. Tada

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\langle m,n,l\rangle \in S_q} f^*(m)f^*(n)\lambda(m, Q_z)\lambda(n, Q_z) \\ &= \sum_{\langle m,n,l\rangle \in S_q} \sum \{\mu(d_1)\mu(d_2)\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)\colon\ d_1^2|m, d_2^2|n, d_i|P_z^*, \delta_1|m, \delta_2|n, \delta_i|Q_z\}, \end{aligned}$$

čia pasinaudojome lygybe

$$\lambda(m, Q_z) = \sum\{\mu(\delta)\colon\ \delta|(m, Q_z)\}.$$

Dabar

$$U = \sum\{\mu(d_1)\mu(d_2)\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)\#A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2)\colon\ d_1, d_2|P_z^*, \delta_1, \delta_2|Q_z\},$$

čia

$$A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2) = \{\langle m^*, n^*, l^*\rangle\colon\ qd_1^2\delta_1 m^* - ad_2^2\delta_2 n^* = l, N \leqslant d_2^2\delta_2 n^* \leqslant 2N, 1 \leqslant l \leqslant L\}.$$

Pažymėkime $D = (d_1^2\delta_1, d_2^2\delta_2)$, tada aibė $A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2)$ netuščia tik tuo atveju, kai $l = Dl^*$. Tada

$$\begin{aligned} A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2) = \{\langle m^*, n^*, l^*\rangle\colon\ &-(ad_2^2\delta_2 D^{-1})n^* \equiv l^* \mathrm{mod}\ (qd_1^2\delta_1 D^{-1}), \\ &N(d_2^2\delta_2)^{-1} \leqslant n^* \leqslant 2N(d_2^2\delta_2)^{-1}, 1 \leqslant l^* \leqslant L/D\}. \end{aligned}$$

Kadangi su kiekvienu l^* lyginys turi vienintelį sprendinį, tai

$$\begin{aligned} \#A(d_1, d_2, \delta_1, \delta_2) &= \Big(\frac{L}{D} + O(1)\Big)\Big(\frac{N}{d_2^2\delta_2}\frac{D}{qd_1^2\delta_1} + O(1)\Big) \\ &= \frac{LN}{q}\frac{1}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2} + O\Big(\frac{ND}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2}\Big) + O\Big(\frac{L}{D}\Big) + O(1). \end{aligned}$$

Tada

$$U = \frac{LN}{q}R_0 + \frac{N}{q}O(R_1) + LO(R_2) + O(R_3),$$

čia

$$R_0 = \sum_{\substack{d_i|P_z^* \\ \delta_i|Q_z}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2}, \quad R_1 = \sum_{\substack{d_i|P_z^* \\ \delta_i|Q_z}} \frac{\mu^2(d_1)\mu^2(d_2)\mu^2(\delta_1)\mu^2(\delta_2)D}{d_1^2d_2^2\delta_1\delta_2},$$

$$R_2 = \sum_{\substack{d_i | P_z^* \\ \delta_i | Q_z}} \frac{\mu^2(d_1)\mu^2(d_2)\mu^2(\delta_1)\mu^2(\delta_2)}{D}, \quad R_3 = \sum_{d_i | P_z^*, \delta_i | Q_z} \mu^2(d_1)\mu^2(d_2)\mu^2(\delta_1)\mu^2(\delta_2).$$

.ibės P_z^*, Q_z neturi bendrų elementų, tai

$$R_0 = \prod_{p|P_z^*}\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\Bigr)^2 \prod_{q|Q_z}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)^2 > \prod_{p}\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\Bigr)^2 \prod_{q|Q}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)^2 = \sigma > 0.$$

.kivaizdu, kad $R_1, R_2 \ll R_3$, tačiau $R_3 \ll \tau(P_z^*)^2\tau(Q_z)^2 = 4^{\omega(P_z)}$, čia τ skirtingų atūraliųjų, ω – skirtingų pirminių daliklių funkcijos. Kadangi $\omega(P_z) = \pi(z) \ll \log q/$ ›g $\log q$, tai $R_3 \ll q^\varepsilon$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$. Taigi

$$U \gg \frac{NL}{q} + \Bigl(\frac{N}{q} + L + 1\Bigr)q^\varepsilon \gg \frac{NL}{q}.$$

eorema įrodyta.

LITERATŪRA

[1] G. Harman, Metric diophantine approximation with two restricted variables III. Two prime numbers, *Journal of Numb. Th.*, **29** (1988), 364–375.

[2] G. Harman, Metric diophantine approximation with two restricted variables I. Two square-free integers, or integers in arithmetic progressions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **103** (1988), 197–206.

[3] D. R. Heath-Brown, Diophantine approximation with square-free numbers, *Math. Z*, **187** (1984), 335–344.

[4] V. Stakėnas, *Approximation of irrationals by m/n satisfying $f(m/n) = a$.*, New Trends in Probability and Statistics. Vol.2: Analytic and Proababilistic Methods in Number Theory, F. Schweiger and E. Manstavičius (Eds), VSP, Utrecht/TEV, Vilnius, 1992, 31–36.

[5] V. Stakėnas, A sieve result for Farey fractions, Preprintas 98-5, Vilnius universiteto matematikos fakultetas, 1998.

A theorem on diophantine approximations

Vilius Stakėnas (VU)

A result is proved on approximation of irrational numbers by rational ones, satisfying some requirements on their multiplicative structure. The statement is comparable with that one on diophantine approximations with square-free integers.