LMD mokslo darbai, 101–108
1998, Vilnius

"Biurokratinės visuomenės" modelis

M. Vaičiulis (ŠU)

1. 1970 m. Spitzer pasiūlė keletą begalinių dalelių sistemų,tarp jų ir nulinio sąveikos spindulio procesą Šį procesą galima taip apibūdinti.Kiekviename gardelės Z mazge x gali būti bet koks skaičius $\eta(x) \geq 0$ dalelių, kuris laikui bėgant atsitiktinai kinta. Jei $\eta(x) \geq 1$, tai per mažą laiko tarpą h viena dalelė peršoka iš x į gretimus mazgus $x+1$, $x-1$ su atitinkama tikimybe $\mu_+ h + o(h), \mu_- h + o(h)$. Skaičiai $\mu_+ h + o(h)$, $\mu_- h + o(h)$ yra NSSP parametrai. Viena iš įdomesnių dalelių sistemų problemų yra invariantinių matų aibės paaiškinimas. NSSP tai padarė Spitzer (1970), Andjel (1982).Yra žinoma, kad NSSP invariantiniai matai yra nepriklausomi geometriškai pasiskirstę su bet kokiu parametru $0 \leq c < 1$ dalelių kiekiai mazguose:

$$P_c(\eta(x), x \in Z) = \prod_{x \in Z} P_c(\eta(x)), \quad \eta(x) = 0,1,...$$

kur $P_c(n) = (1-c)c^n$, $n = 0, 1, ...$ – geometrinis skirstinys (plačiau žr. Andjel [1], Liggett [2]).

2. Šiame darbe nagrinėjamas naujas NSSP tipo modelis 'su atmintimi', pavadintas biurokratinės visuomenės procesu (BVP). Šiame modelyje dalelių skaičius $\eta(x)$ interpretuojamas kaip 'individo, esančio mazge x, turtas (pinigų kiekis)'.Tarp bet kurių gretimų individų x ir $x+1$ yra 'biurokratas', priimantis dvi reikšmes $b(x) = -1$, arba $+1$, kuris leidžia 'pinigams' judėti tik kryptimi $x \to x+1$ (jei $b(x) = +1$) arba $x+1 \to x$ (jei $b(x) = -1$). Laikui bėgant, 'biurokratų' nuomonės b(x) atsitiktinai keičiasi. Matematiškai (baigtinis) BVM apibrėžiamas kaip Markovo procesas su būsenų (konfigūracijų) aibe χ_N, kurią sudaro sekos

$$(\eta, b) = (\eta(x), b(x), x = 1,2,..., N),$$

kur $\eta(x) = 0,1,...$ ir $b(x) = -1, +1$. N-tasis ir x-tasis mazgai – gretimi. Kiekvienai konfigūracijai $\eta = (\eta(z), z = 1,2,...,N)$ ir bet kokiems mazgams $x, y = 1,2,...,N$, $|x-y| = 1$, apibrėžiama nauja konfigūracija $\eta^{xy} = (\eta^{xy}(z), z = 1,2,..., N)$ lygybe

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(x) - 1, & \text{jei } z = x, \\ \eta(y) + 1, & \text{jei } z = y, \\ \eta(z), & \text{jei } z \neq x, y. \end{cases}$$

Kiekvienai konfigūracijai $b = (b(z),\ z = 1,2,\ldots,N)$ ir bet kokiam mazgui $x = 1,2,\ldots,N$ apibrėžiama nauja konfigūracija $b^x = (b^x(z), z = 1,2,\ldots, N)$ lygybe:

$$b^x = \begin{cases} -b(z), & jei\ z = x, \\ b(z), & jei\ z \neq x. \end{cases}$$

BVP evoliuciją nusako generatorius :

$$Lf(\eta,b) = \mu_+ \sum_{x=1}^{N} \left[f(\eta^{x,x+1},b) - f(\eta,b)\right] 1(\eta(x) \geq 1, b(x) = +1)$$

$$+ \mu_- \sum_{x=1}^{N} \left[f(\eta^{x+1,x},b) - f(\eta,b)\right] 1(\eta(x+1) \geq 1, b(x) = -1)$$

$$+ \lambda \sum_{x=1}^{N} \left[f(\eta,b^x) - f(\eta,b)\right] 1(\eta(x) \geq 1, \eta(x+1) \geq 1)$$

$$+ \nu_+ \sum_{x=1}^{N} \left[f(\eta,b^x) - f(\eta,b)\right] 1(\eta(x) = 0, b(x) = +1)$$

$$+ \nu_- \sum_{x=1}^{N} \left[f(\eta,b^x) - f(\eta,b)\right] 1(\eta(x+1) = 0, b(x) = -1).$$

Čia skaičiai μ_+, μ_-, λ, ν_+, ν_- ≥ 0 yra BVP parametrai. Remiantis žinomu invariantiškumo kriterijumi: matas $P(\eta,b)$ invariantinis tada ir tik tada, jei bet kokiai funkcijai $f(\eta,b)$ teisinga lygybė $\sum_{(\eta,b)\in\chi_N} Lf(\eta,b)P(\eta,b) = 0$, įrodoma

TEOREMA. *Nepriklausomas tikimybių skirstinys*

$$P_c(\eta,b) = (1-c)^N 2^{-N} c^{\sum_{x=1}^{N}\eta(x)} \tag{1}$$

(kur $0 \leq c < 1$ – bet koks skaičius) yra invariantinis BVP matas tada ir tik tada, jei jo parametrai tenkina lygybę

$$\nu_+ = \nu_- = \frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_-). \tag{2}$$

Įrodymas. Yra teisingos, išvedamos naudojantis indikatorių savybėmis bei mazgų išdėstymu ant apskritimo, lygybės :

$$\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta^{x,x+1},b)1(\eta(x)\geq 1, b(x)=+1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)}$$
$$=\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b)1(b(x)=+1,\eta(x+1)\geq 1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} \tag{3}$$

$$\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta^{x+1,x},b)1(b(x)=-1,\eta(x+1)\geq 1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)}$$
$$=\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b)1(\eta(x)\geq 1, b(x)=-1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} \tag{4}$$

$$\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b^{x})1(\eta(x)=0, b(x)=+1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)}$$
$$=\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b)1(\eta(x)=0, b(x)=-1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} \tag{5}$$

$$\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b^{x})1(b(x)=-1,\eta(x+1)=0)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)}$$
$$=\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b)1(b(x)=+1,\eta(x+1)=0)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} \tag{6}$$

$$\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b^{x})1(\eta(x)\geq 1, b(x)=-1,\eta(x+1)\geq 1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)}$$
$$=\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b)1(\eta(x)\geq 1, b(x)=+1,\eta(x+1)\geq 1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} \tag{7}$$

$$\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b^{x})1(\eta(x)\geq 1, b(x)=-1,\eta(x+1)\geq 1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)}$$
$$=\sum_{(\eta,b)\in\chi_N}\sum_{x=1}^{N} f(\eta,b)1(\eta(x)\geq 1, b(x)=+1,\eta(x+1)\geq 1)\, c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} \tag{8}$$

Būtinumas. Remiantis BVP generatoriaus išraiška bei (3)–(8) tapatybėmis

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\eta,b)\in\chi_N} Lf(\eta,b)\,P_c(\eta,b) = \\
&\left(2\nu_- - \mu_+ - \mu_-\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{x=1} f(\eta,b)1(b(x)=+1,\eta(x+1)=0)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)} \\
&+\left(\mu_+ + \mu_- - 2\nu_+\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{x=1} f(\eta,b)1(\eta(x)=0,b(x)=+1)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)} \\
&+\left(\nu_+ - \nu_-\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{x=1} f(\eta,b)1(\eta(x)=0)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Remiantis invariantiškumo kriterijumi iš (9) išvedama lygtis

$$\begin{aligned}
&\left(2\nu_- - \mu_+ - \mu_-\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{x=1} f(\eta,b)1(b(x)=+1,\eta(x+1)=0)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)} \\
&+\left(\mu_+ + \mu_- - 2\nu_+\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{x=1} f(\eta,b)1(\eta(x)=0,b(x)=+1)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)} \\
&+\left(\nu_+ - \nu_-\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{x=1} f(\eta,b)1(\eta(x)=0)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Parinkus funkciją $f(\eta,b)=\prod_{x=1}^{N} 1(\eta(x)=0,b(x)=-1)$ (10) lygtis suvedama į

$$\left(\nu_+ - \nu_-\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{N}\prod_{y=1}^{N} 1(\eta(y)=0,b(y)=-1)1(\eta(x)=0)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)} = 0, \tag{11}$$

nes bet kuriam mazgui x teisingos lygybės

$$\prod_{y=1}^{N} 1(\eta(y)=0,b(y)=-1)1(b(x)=+1,\eta(x+1)=0)=0$$

$$\prod_{y=1}^{N} 1(\eta(y)=0,b(y)=-1)1(\eta(x)=0,b(x)=+1)=0\,.$$

Taigi iš (11) seka, kad $\nu_+ - \nu_- = 0$, nes

$$\sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{N}\prod_{y=1}^{N} 1(\eta(y)=0,b(y)=-1)1(\eta(x)=0)\, c^{\sum_{z=1}^N \eta(z)} > 0\,.$$

Pasinaudojus gautu rezultatu $\nu_+ - \nu_- = 0$, (10) lygtis suvedama į

$$\left(2\nu_- - \mu_+ - \mu_-\right) \sum_{(\eta,b)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{x=1} f(\eta,b) 1(b(x)=+1)\left(1(\eta(x+1)=0) - 1(\eta(x)=0)\right) c^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} = 0 \quad (12)$$

Parinkus funkciją

$$f(\eta,b) = 1(\eta(1)\geq 0)1(\eta(2)=0)\ldots 1(\eta(N)=0)1(b(1)=+1)\ldots 1(b(N-1)=+1)1(b(N)=-1)$$

iš (12) lygties gaunama $2\nu_- - \mu_+ - \mu_- = 0$.

Pakankamumas seka iš (2) ir (9) lygybių.

3. Remiantis BVP panašumu į NSSP galima tikėtis,kad kai N ir $t\sim N$ dideli, BVP modelyje tikėtinas lokalios pusiausvyros atsiradimas.Matematiškai tai būtų hipotezė, kad visiems $t\geq 0$ ir kiekvienai glodžiai funkcijai $g(y)$, $y\in[0,1]$ egzistuoja riba :

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{x=1}^{N}\eta_{tN}(x)g(x/N) = \int_0^1 \rho_0(y)g(y)dy, \quad (13)$$

laikant, kad (13) galioja laiko momentu $t=0$. Nesunku patikrinti,kad

$$\begin{aligned} L\sum_{x=1}^{N} g(\frac{x}{N})\eta(x) &= \\ &= \mu_+ \sum_{x=1}^{N}\left(g(\frac{x+1}{N}) - g(\frac{x}{N})\right)1\left(\eta(x)>0, b(x)=+1\right) + \\ &+ \mu_- \sum_{x=1}^{N}\left(g(\frac{x}{N}) - g(\frac{x+1}{N})\right)1\left(b(x)=-1, \eta(x+1)>0\right), \end{aligned}$$

todėl kiekvienam $t>0$ reiškinys

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} g\left(\frac{x}{N}\right)\eta_{tN}(x) - \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} g\left(\frac{x}{N}\right)\eta_0(x) \\ &- N\int_0^t \left\{\mu_+ \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\left(g\left(\frac{x+1}{N}\right) - g\left(\frac{x}{N}\right)\right)1\left(\eta_{tN}(x)>0, b_{tN}(x)=+1\right)\right\}ds \\ &- N\int_0^t \left\{\mu_- \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\left(g\left(\frac{x}{N}\right) - g\left(\frac{x+1}{N}\right)\right)1\left(b_{tN}(x)=+1, \eta_{tN}(x+1)>0\right)\right\}ds \end{aligned} \quad (14)$$

yra martingalas, t.y. jo vidurkis lygus nuliui.Be to,jei P_c yra invariantinis matas (1) ir $E_c\eta(x) = \dfrac{c}{1-c} = \rho$, tai

$$E_c 1\left(\eta(x)>0, b(x)=+1\right) = E_c 1\left(b(x)=+1, \eta(x)>0\right) = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho+1}. \quad (15)$$

Remiantis lygybėmis (14), (15) ir hidrodinaminės ribos išvedimo principais galima tikėtis, kad ribinis 'tankio profilis' $\rho(t, y)$ tenkina dalinių išvestinių lygtį

$$\frac{\partial\rho(t,y)}{\partial t}=\frac{1}{2}(\mu_{-}-\mu_{+})\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho(t,y)}{1+\rho(t,y)}\right), \tag{16}$$

su duota pradine sąlyga $\rho(0, y)$. Netiesinės diferencialinės lygtys tipo (16) pasižymi trūkių sprendinių (smūginių frontų) egzistavimu. Paprasčiausias trūkus (4) lygties sprendinys visoje tiesėje $-\infty < y < +\infty$, $t \geq 0$ yra

$$\rho(t,y)=\begin{cases}\rho_{+},\ jei\ y>\gamma t,\\ \rho_{-},\ jei\ y\leq\gamma t,\end{cases}$$

kur smūginio fronto greitis yra pastovus ir lygus $\gamma=\dfrac{\mu_{+}-\mu_{-}}{2(1+\rho_{+})(1+\rho_{-})}$.

4. BVP evoliucija buvo modeliuojama kompiuteriu.Tuo tikslu modelis buvo supaprastintas, išlaikant pagrindinius principus:

1) Procesas evoliucionuoja diskrečiais laiko momentais $t = 0, 1,\ldots,$ parinkus atitinkamą laiko vienetą ;
2) Parametrai $\mu_{+}, \mu_{-}, \lambda$ tenkina sąlygas : $\mu_{+} + \mu_{-} = 1, 0 \leq \mu_{+} \leq 1$, $0 \leq \mu_{-} \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$;
3) Iš būsenos $(\eta,b) = (\eta(x),b(x), x = 1,2,\ldots, N)$ lyginiais laiko momentais $t = 2k \to t = 2k + 1$ procesas pereina į būseną $(\eta',b) = (\eta'(x),b(x), x = 1,2,\ldots,N)$ pagal taisyklę : jei mazgas x netuščias, tai su tikimybe $\mu_{+}\, 1(b(x) = 1)$ viena dalelė iš jo permetama į $x + 1$ mazgą ir su tikimybe $\mu_{-}\, 1(b(x) = -1)$ viena dalelė iš jo permetama į $x - 1$ mazgą;
4) Laiko momentais $t = 2k + 1 \to t = 2k + 2$ procesas iš būsenos $(\eta,b) = (\eta(x), b(x), x = 1,2,\ldots,N)$ gali pereiti tik į būsenas $(\eta(x), b'(x), x = 1,2,\ldots,N)$ pagal taisykles: $b(x)$ keičia ženklą su tikimybėmis: $\lambda 1(\eta(x) \geq 1, \eta(x + 1) \geq 1)$, $\mu_{+}\, 1(\eta(x) = 0, b(x)= + 1)$, $\mu_{-}\, 1(\eta(x + 1) = 0, b(x) = - 1)$.

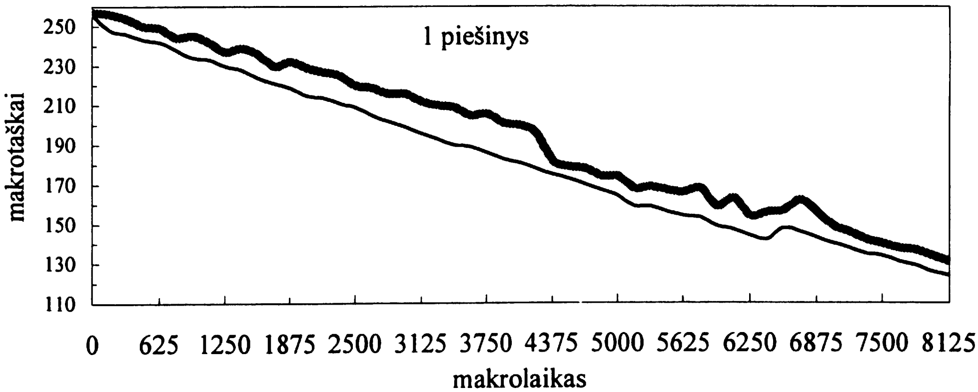
Parinkus parametrų μ_{+}, μ_{-}, λ reikšmes, modeliuotas procesas su invariantinėmis ir neinvariantinėmis pradinėmis tikimybėmis ir stebėta pusiausvyra (artėjimas į pusiausvyrą). Bandyta modeliuoti smūginių frontų atsiradimą dviejų tipų pradiniams profiliams. Pirmuoju atveju,paėmus mazgų skaičių $N = 2^{15}$ ir suspaudimo koeficientą $\varepsilon = \frac{1}{64}$, laiko momentu $t = 0$ generuotas profilis :

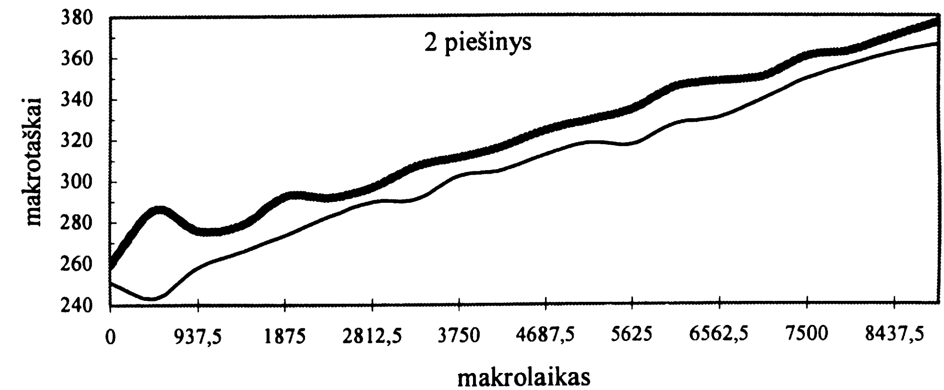
$$\eta_0(k)\approx 2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi k}{512}\right)\right),\ k=1,2,\ldots,512.$$

Stebėtas lėtas smūginio fronto formavimasis ir slinkties užuomazgos.

Antruoju atveju, pirmuosiuose 2^{14} mikromazguose dalelių skaičių paskirsčius pagal geometrinį skirstinį su parametru $c_1 = 2/3$ (vidutinis dalelių tankis mikromazge $\rho_- = 2$), o nuo $2^{14}+1$ iki 2^{15} mikromazgo pagal tą patį skirstinį , bet $c_2 = 4/5$ ($\rho_+ = 4$). Tokiu būdu pradiniu laiko momentu $t = 0$ generuojamas apytiksliai laiptuotas profilis :

$$\eta_0'(k) \approx \begin{cases} 2, k \le 256 \\ 4, k > 256 \end{cases} \qquad k = 1,2,3,...,512 .$$





Remiantis modeliavimo rezultatais, iliustruotais 1, 2 piešiniais (1 pieš.: $\lambda = 0.95, \mu_+ = 0.05$; 2 pieš.: $\lambda = 0.5, \mu_+ = 0.75$; storesne linija vaizduojama smūginio fronto viršutinio taško padėtis) padaryta išvada, kad smūginio fronto greitis yra pastovus dydis, priklausantis nuo parametrų μ_+, μ_-, ρ_+, ρ_- reikšmių.

LITERATŪRA

[1] E.D. Andjel (1982). Invariant meansures for the zero-range process. *Ann Probab.* 10, 525-547.
[2] T.M. Liggett (1985). *Interacting Particle Systems*. Springer.

"Bureaucratic society" process

M. Vaičiulis

In this paper a zero range process with memory is discussed. It is a "bureaucratic society" process. It is just alike the zero range process. A theorem of invariant measures is proved, hydrodynamics limit is analysed.