LMD mokslo darbai, 117–121
1998, Vilnius

Analizinis dalinių išvestinių sistemos supaprastinimas

D. Jurgaitis (ŠU)

Nagrinėkime keturių pirmos eilės dalinių išvestinių lygčių sistemą, kurios matricinis užrašas yra toks:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)+A(x,y,z)u=0 \tag{1}$$

čia $u(x,y,z)$ – ieškomoji funkcija, x,y,z – nepriklausomi kompleksiniai kintamieji, E – vienetinė, I_1 ir I_2 – pastovios kvadratinės ketvirtos eilės matricos, p – natūralusis skaičius, $A(x,y,z)=A_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k(y,z)x^k$ – žinomos funkcijos. Pastaroji laipsninė eilutė konverguoja $x=0$ aplinkoje. Taškuose $x=0$ stipriai išsigimsta (1) sistemos eilė.

(1) sistemos sprendiniai išsigimimo taškų aplinkoje laipsninėmis eilutėmis neegzistuoja, todėl duotąją sistemą suvesime į sistemas, kurių struktūra bus tokia, kad sprendiniai laipsninėmis eilutėmis egzistuos ir juos dėl sistemų struktūros bus patogu rasti. Tuo tikslu rasime keitinį

$$u(x,y,z)=T(x,y,z)\,v(x,y,z),\quad |T|\neq 0, \tag{2}$$

suvedantį (1) sistemą į dvi sistemas

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial T}{\partial x}+I_1\frac{\partial T}{\partial y}+I_2\frac{\partial T}{\partial z}\right)+AT-TB=0, \tag{3}$$

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+Y_1\frac{\partial v}{\partial y}+Y_2\frac{\partial v}{\partial z}\right)+Bv=0, \tag{4}$$

čia $B(x,y,z)=B_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}B_k(y,z)x^k$, $Y_1(x,y,z)=T^{-1}I_1T$, $Y_2(x,y,z)=T^{-1}I_2T$.

Sistemų (3) ir (4) struktūra analogiška (1) sistemos struktūrai.

(3) sistemos sprendinių ieškokime tokiu pavidalu:

$$T(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(y,z)x^k \tag{5}$$

Įrašę (5) į (3), prilyginę nuliui koeficientus prie vienodų x laipsnių gauname rekurentines formules (5) eilutės koeficientams rasti

$$A_0 T_0 - T_0 B_0 = 0, \tag{6}$$

$$A_0 T_k - T_k B_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \left(A_{k-e} T_e - T_e B_{k-e} \right) + (k-p) T_{k-p} + I_1 \frac{\partial T_{k-p-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial T_{k-p-1}}{\partial z} = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots,$ $l = 0, 1, \ldots, k,$ $T_k \equiv 0,$ kai $k < 0$.

Jeigu iš (6) lygybių rastume $T_k(y,z)$ ir $B_k(y,z)$, tai galėtume tvirtinti, kad (5) yra formalus (3) sistemos sprendinys. Prieš spręsdami, (6) lygties matricą A_0, parinkime taip, kad tolimesni skaičiavimai būtų patogūs. Tarkime, kad A_0 tikrines reikšmes galima suskirstyti į 2 grupes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ir $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_4$, taip, kad $\lambda_i \neq \lambda_j$, kai $i \le m$, o $j > m$. Tiesinėje algebroje įrodoma, kad A_0 yra panaši į blokinę diagonalinę matricą

$$\begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

čia A_0^{11} kvadratinė m-tos eilės matrica, kurios tikrinės reikšmės $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, o A_0^{22} – kvadratinė 4-m-tos eilės matrica, kurios tikrinės reikšmės $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_4$.

Nesusiaurinsime bendrumo, jeigu laikysime, kad A_0 yra tokios struktūros matrica, tada (6) lygybę tenkina $T_0 = E$, $B_0 = A_0$, o antrąją iš (6) galima užrašyti tokiu pavidalu

$$A_0 T_k - T_k B_0 = B_k + H_k \tag{8}$$

ir į H_k išraišką įeina T_j *ir* B_j, $j < k$.

Kad ieškomojo sprendinio struktūra būtų kuo paprastesnė pasinaudokime metodu išdėstytu [1]. Pareikalaukime, kad $B_k(y,z)$ struktūra būtų tokia

$$B_k(y,z) = \begin{pmatrix} B_k^{11}(y,z) & 0 \\ 0 & B_k^{22}(y,z) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Tai įmanoma, kada $T_k(y,z)$

$$T_k(y,z) = \begin{pmatrix} 0 & T_k^{12}(y,z) \\ T_k^{21}(y,z) & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Pažymėję

$$H_k(y,z)=\begin{pmatrix} H_k^{11}(y,z) & H_k^{12}(y,z) \\ H_k^{21}(y,z) & H_k^{22}(y,z) \end{pmatrix} \tag{11}$$

ir įrašę (7), (9), (10) ir (11) į (8) gauname keturias matricines lygtis

$$A_0^{11}T_k^{12} - T_k^{12}A_0^{22} = H_k^{12},\ B_k^{11} + H_k^{11} = 0,$$

$$A_0^{22}T_k^{21} - T_k^{21}A_0^{11} = H_k^{21},\ B_k^{22} + H_k^{22} = 0.$$

Iš čia randame $B_k^{11} = -H_k^{11}$ ir $B_k^{22} = -H_k^{22}$, o iš kitų dviejų lygybių galima vienareikšmiškai nustatyti T_k^{12} ir T_k^{21}, kadangi matricos A_0^{11} ir A_0^{22} neturi bendrų tikrinių reikšmių. Vadinasi nuosekliai rasime $B_k^{11}, B_k^{22}, T_k^{12}, T_k^{21}$, $k = 1,2,\ldots$..

Raskime matricas $T(x, y, z)$ ir $B(x, y, z)$ tenkinančias (3) sistemą ir turinčias aukščiau nurodytą struktūrą. Tuo tikslu pažymėkime

$$T(\mathrm{x}, y, z) = E + P(x, y, z)$$

$$B(x, y, z) = A_0 + Q(x, y, z)$$

ir pareikalaukime, kad

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & P^{12}(x,y,z) \\ P^{21}(x,y,z) & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x,y,z)=\begin{pmatrix} Q^{11}(x,y,z) & 0 \\ 0 & Q^{22}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Matricas I_1, I_2 ir $A(x, y, z)$ suskaldykime į blokus, t.y.

$$I_1 = \begin{pmatrix} I_1^{11} & I_1^{12} \\ I_1^{21} & I_1^{22} \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} I_2^{11} & I_2^{12} \\ I_2^{21} & I_2^{22} \end{pmatrix},$$

$$A(x,y,z)= A_0 + \begin{pmatrix} A^{11}(x,y,z) & A^{12}(x,y,z) \\ A^{21}(x,y,z) & A^{12}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Įrašę šias išraiškas į (3) sistemą, gausime tokias 4 sistemas:

$$x^{p+1}\left(I_1^{12}\frac{\partial P^{21}}{\partial y}+I_2^{12}\frac{\partial P^{21}}{\partial z}\right)+A^{11}+A^{12}P^{21}-Q^{11}=0$$

$$x^{p+1}\left(I_1^{21}\frac{\partial P^{12}}{\partial y}+I_2^{21}\frac{\partial P^{12}}{\partial z}\right)+A^{22}+A^{21}P^{12}-Q^{22}=0$$

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial P^{12}}{\partial x}+I_1^{12}\frac{\partial P^{12}}{\partial y}+I_2^{12}\frac{\partial P^{12}}{\partial z}\right)+A_0^{11}P^{12}-P^{12}A_0^{22}+A^{11}P^{12}-P^{12}Q^{22}+A^{12}=0$$

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial P^{21}}{\partial x}+I_1^{22}\frac{\partial P^{21}}{\partial y}+I_2^{22}\frac{\partial P^{21}}{\partial z}\right)+A_0^{22}P^{21}-P^{21}A_0^{11}+A^{22}P^{21}-P^{21}Q^{11}+A^{21}=0$$

Iš pirmos ir ketvirtos lygybių eliminavę Q^{11}, gauname sistemą matricai $P^{21}(x, y, z)$, o atlikę analogišką procedūrą su antrąja ir trečiąja lygybėmis gauname sistemą matricai $P^{12}(x, y, z)$. Šių sistemą neužrašysime , tik pastebėsime kad jos abi P^{21} arba P^{12} atžvilgiu yra netiesinės ir P^{21} arba P^{12} apskritai nebūtinai kvadratinės matricos, jos gali būti stačiakampės. Nagrinėkime viena iš šių sistemų , kita jai visiškai analogiška. Matricos pvz.: P^{12} elementus surašykime tam tikra tvarka ir gautąjį $m(4\text{-}m)$ vektorių pažymėkime $w(x, y,z)$. Jam gausime tokią lygčių sistemą:

$$\begin{aligned}&x^{p+1}\left(E\frac{\partial w}{\partial x}+I_1^{(1)}\frac{\partial w}{\partial y}+I_2^{(1)}\frac{\partial w}{\partial z}\right)+A_0w+A^{(1)}(x,y,z)+A^{(2)}(x,y,z)w-wA_0^{(1)}\\&-wA^{(3)}(x,y,z)-wA^{(4)}(x,y,z)-x^{p+1}w\left(I_1^{(1)}\frac{\partial w}{\partial y}+I_2^{(1)}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\end{aligned}\tag{12}$$

čia $A^{(i)}(x,y,z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k^{(i)}(y,z)x^k$, $i=1,2,3,4$, matricos A_0 ir $A_0^{(1)}$ neturi vienodų tikrinių reikšmių.

(12) sistemos sprendinių ieškokime pavidalu

$$w\ (x,y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}w_k(y,z)x^k.\tag{13}$$

Įrašę (13) į (12) prilyginę nuliui koeficientus prie x laipsnių gauname tokias rekurentines formules (13) eilutės koeficientams apskaičiuoti:

$$\begin{aligned}&A_0w_k-w_kA_0^{(1)}+A_k^{(1)}+\sum_{l=1}^{k-1}\left(A_{k-l}^{(2)}w_l-w_lA_{k-l}^{(4)}\right)-\sum_{l=1}^{k-2}\sum_{m=1}^{l}w_{l-m+1}A_m^{(3)}w_{k-l-1}+(k-p)w_{k-p}\\&+I_1^{(1)}\frac{\partial w_{k-p-1}}{\partial y}+I_2^{(1)}\frac{\partial w_{k-p-1}}{\partial z}-\sum_{l=1}^{k-p-2}\left(w_{k-p-l-1}I_1^{(1)}\frac{\partial w_l}{\partial y}+w_{k-p-l-1}I_2^{(1)}\frac{\partial w_l}{\partial z}\right)=0,\end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots$

Taigi radome matricas $T(x, y, z)$ ir $B(x, y, z)$ ir (1) dalinių išvestinių sistemą suvedėme į (3) ir (4) sistemas. (4) sistema yra (1) sistemos tipo, tik joje matrica $B(x, y, z)$ yra blokinė diagonalinė.

Pastabos:

1. Čia išdėstytą metodą sėkmingai galima taikyti bet kokio matavimo pirmos eilės dalinių išvestinių sistemoms.

2. Šiuo metodu bet kokios dalinių išvestinių sistemos sprendimą galima suvesti į sistemų, kurių matricos turi tik vieną tikrinę reikšmę, sprendimą.

LITERATŪRA

[1] Sibuya Y. Sur réduction analytique d'un systeme d'equations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, (1), 1958, 527-540.

Analytical reduction of a system of partial differential equations

D. Jurgaitis

A system of four of the first order partial differential equations is transformed into the system, which has blocked diagonal matrix. Under this method it is possible to split up any first order system of partial differential equations into the systems which matrices have only one eigenvalue.