Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
65 tomas, 2024, 22–33
https://doi.org/10.15388/LMR.2024.37772

Tolydaus laiko diskrečiųjų martingalų statistinių modelių asimptotinis įvertinimas

Vaidotas Kanišauskas, Karolina Kanišauskienė

Šiaulių akademija, Vilniaus universitetas
Vytauto g. 84, LT-76352 Šiauliai, Lietuva
El. paštas: kanisauskasva@gmail.com; kanisauskiene.k@gmail.com

Įteiktas 2024 birželio 25; publikuotas 2024 gruodžio 10

Santrauka. Darbe nagrinėjami tolydaus laiko diskrečiųjų lokaliųjų martingalų statistiniai eksperimentai, apimantys visų tipų taškinių procesų modelius. Diskrečiųjų lokaliųjų martingalų lokalaus tankio procesas išreiškiamas stochastinio integralo pagal kompensuotą taškinį matą stochastine eksponente. Nustatomos patogios tikrinimui bendrosios sąlygos, užtikrinančios maksimalaus tikėtinumo ir Bajeso įverčių tolygų pagrįstumą, tolygų asimptotinį normalumą ir asimptotinį minimaksiškumą kiekviename parametrinės aibės kompakte. Darbe taikomas optimalus atsitiktinių ir parametrinių funkcijų Frešė diferencijuojamumas pagal tikimybę normuotose erdvėse tolydaus kompensatoriaus atžvilgiu. Parodoma, kaip pagrindinės sąlygos kardinaliai supaprastėja atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi atveju.

Raktiniai žodžiai: tolydaus laiko diskretusis lokalusis martingalas; lokalusis asimptotinis normalumas; kompensatorius; diferencijavimas normuotose erdvėse
AMS: 60G44, 60G55, 62E20, 62F12

Įvadas

Asimptotinėje parametrų įverčių teorijoje pagrindinė sąvoka yra lokalus asimptotinis normalumas (LAN). Idėją apie tikimybinių matų šeimų aproksimavimą Gauso skirstiniu lokaliai asimptotine prasme pirmasis išsakė A. Valdas [20]. Toliau šią idėją plėtojo Le Kamas [2], įvedęs lokalaus asimptotinio normalumo apibrėžimą. Nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių LAN sąlygas gavo J. Hajekas [4, 5]. Kai atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi ir nevienodai pasiskirstę, LAN sąlygas suformulavo I. A. Ibragimovas ir R. Z. Chasminskis [6]. Nehomogeninio Puasono proceso ir Puasono tipo procesų atvejais LAN sąlygas suformulavo J. A. Kutojancas [14, 15].

LAN yra viena iš keturių pagrindinių sąlygų, lemiančių asimptotiškai optimalias maksimalaus tikėtinumo ir Bajeso įverčių savybes, aprašytas I. A. Ibragimovo ir R. Z. Chasminskio monografijoje [7]. Tiriant konkrečių statistinių modelių parametrų asimptotines įverčių savybes lieka detalizuoti sąlygas, kurios užtikrina minėtų bendrųjų keturių pagrindinių sąlygų, lemiančių maksimalaus tikėtinumo ir Bajeso įverčių tolygų pagrįstumą, tolygų asimptotinį normalumą ir asimptotinį minimaksiškumą kiekviename parametrinės aibės kompakte, galiojimą. Tokiu principu J. A. Kutojancas nagrinėjo difuzinio tipo procesus [15], Puasono tipo procesus [16], nehomogeninius Puasono procesus [15], Gauso procesus [13, 15], J. N. Linkovas – semimartingalus [18], difuzinio tipo procesus [18], skaičiuojančius procesus [17, 18], atstatymo procesus ir kt. [18], V. Kanišauskas – daugiavariančius taškinius procesus [10] ir procesų klasę, kurios lokalaus tankio procesas išreiškiamas per stochastinę eksponentę nuo sumos dviejų stochastinių integralų, vienas iš kurių apibrėžtas pagal daugiamatį tolydų lokalųjį martingalą, o kitas – pagal kompensuotą taškinį matą [11].

Skirtingai nuo visų čia minėtų modelių, kuriuose gautos asimptotiškai optimalios parametrų įverčių savybės, straipsnyje bus naudojamos kitokios reguliarumo sąlygos, tiksliau, bus naudojamas atsitiktinių parametrinių funkcijų Frešė diferencijavimas pagal tikimybę normuotoje erdvėje, kur norma apibrėžiama kaip stochastinis integralas pagal kompensatorių. Tokio tipo diferencijavimą naudojo A. F. Taraskinas [19], ir jis tam tikra prasme yra silpnesnis už parametrinės funkcijos diferencijavimą erdvėje $C_1^0(\Theta)$, įvestą J. N. Linkovo [17, 18] ir naudotą kitų autorių [10], arba diferencijavimą pagal tikimybę 1, naudotą J. A. Kutojanco [14, 15, 16].

Šis straipsnis yra V. Kanišausko darbo [12], kuriame nagrinėjamas tik tolydaus laiko diskrečiųjų martingalų lokalus asimptotinis normalumas, tęsinys. Nustatant diskrečiųjų martingalų parametrų optimalias asimptotines savybes yra suformuluotos bendrosios sąlygos, kurios kardinaliai pasikeičia nagrinėjant atstatymo procesą su tolydžiu kompensatoriumi.

Atstatymo proceso atveju naudojamas atsitiktinių funkcijų Frešė diferencijavimas pagal tikimybę normoje kompensatoriaus atžvilgiu transformuojasi į atsitiktinės funkcijos diferencijavimą vidurkio kvadrato prasme. Nors [12] straipsnyje yra pateikti tam tikri bendrųjų sąlygų supaprastinimai atstatymo proceso atveju, tačiau tame straipsnyje išsamiau nagrinėjamas LAN, o ne visos keturios bendrosios parametrų asimptotinės teorijos sąlygos. Šiame straipsnyje pateiktas visų keturių minėtų bendrųjų sąlygų supaprastinimas atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi atveju.

1 Pagrindinės sąvokos ir pagalbiniai rezultatai

Straipsnyje bus naudojama terminologija, įprasta stochastinėje atsitiktinių procesų teorijoje [8].

Tarkime, kad $E, \mathcal{E})$ – Lūzino erdvė, t. y. E – kompaktinės metrinės erdvės boreliškas poaibis, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta)$ – stochastinis modelis su filtracija, kuriame parametrinė aibė $\Theta \subset R^k$ $(k \geqslant 1)$ laikoma iškila ir atvira, μ yra sveikaskaitis atsitiktinis matas aibėje $(R_+ \times E, \mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{E})$ su $(\mathbb{P}_\theta, \mathbb{F})$-kompensatoriumi $\nu(\theta)$, tenkinančiu sąlygą $\nu(\theta, \{t\}, E) \equiv 0$.

1 teorema. [9] *Tarkime, kad tenkinamos sąlygos*:

1) $\nu(\theta, \{t\}, E) \equiv 0$ P_y*-b.v.*, $t \in R_+$;

2) *egzistuoja griežtai teigiama numatoma funkcija* $V(y,\theta) = V(y,\theta,\omega,t,x) \geqslant 0$, *apibrėžta aibėje* $\Omega\times R_+\times E$ *tokia, kad* $\nu(y,\omega,dt,dx) = V(y,\theta,\omega,t,x)\,\nu(\theta,\omega,dt,dx)$;

3) $\bigl(1-\sqrt{V(y,\theta)}\bigr)^2 * \nu(\theta)_t < \infty,\ P_y$*-b.v.*, $t \in R_+$.

Tada $P_y \overset{loc}{\ll} P_\theta$ *ir lokalaus tankio procesas (mato* $P_y^t = P_y\,|_{\mathcal{F}_t}$ *atžvilgiu* $P_\theta^t = P_\theta\,|_{\mathcal{F}_t}$*) turi tokią išraišką*

$$\begin{aligned} Z_t(y,\theta) = \frac{dP_y^t}{dP_\theta^t} &= \mathcal{E}_t\Bigl(\bigl(V(y,\theta)-1\bigr) * (\mu-\nu(\theta))_t\Bigr) \\ &= \exp\bigl\{\ln V(y,\theta) * \mu_t - \bigl(V(y,\theta)-1\bigr) * \nu(\theta)_t\bigr\}; \end{aligned}$$

čia $\mathcal{E}_t(\cdot)$ *– stochastinė eksponentė, o* $U * \mu_t = \int_0^t \int_E U(\omega,s,x)\,\mu(\omega,ds,dx)$, $U * \nu(\theta)_t = \int_0^t \int_E U(\omega,s,x)\,\nu(\theta,\omega,ds,dx)$.

1 pastaba. Kai tenkinamos 1 teoremos sąlygos, galioja 20 teoremos iš [9] I, II, III_a sąlygos, užtikrinančios $P_y \overset{loc}{\ll} P_\theta$ ir nurodyto proceso $Z_t(y,\theta)$ egzistavimą. Tas tarpinis rezultatas pateiktas 20 teoremos įrodyme.

Atsitiktinių funkcijų diferencijavimas bus apibrėžtas pagal [1, 19].

Tarkime, kad procesas $A \in \mathcal{P}\cap\mathcal{V}$. Įvesime normuotą integruojamų funkcijų klasę $L^2_{loc}(A) = \{H : H \in \mathcal{P}, \|H\|_A \in \mathcal{A}_{loc}\}$; čia $\|H\|_{A_t} = \bigl(H^2 * A_t\bigr)^{\frac{1}{2}}$ – erdvės $L^2_{loc}(A)$ norma.

Jei $U = (U_1, U_2, \ldots, U_k)'$ – vektorinė funkcija, tai užrašas $U \in L^{2,(k)}_{loc}$ reiškia, kad $U_i \in L^2_{loc}$ visiems $i = 1, 2, \ldots, k$.

Tarkime, kad atsitiktinė funkcija $U(\theta) = (U_t(\theta)) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Theta)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \Theta \subset R^k$, $k \geqslant 1$, – atvira aibė ir $U(\theta) \in L^2_{loc}(A)$ visiems θ iš tam tikros taško $\theta_0 \in \Theta$ aplinkos. Sakysime, kad atsitiktinė funkcija $U(\theta)$ diferencijuojama pagal P-tikimybę (Frešė prasme) erdvėje $L^2_{loc}(A)$ taške $\theta = \theta_0$, jei egzistuoja tokia vektorinė funkcija $\dot{U}(\theta_0) = (\dot{U}_t(\theta_0)) \in L^{2,(k)}_{loc}(A)$, kad

$$P - \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} \bigl\| U(\theta_0+h) - U(\theta_0) - \bigl(h, \dot{U}(\theta_0)\bigr) \bigr\|_{A_t} = 0;$$

čia $\dot{U}(\theta_0) = \Bigl(\frac{\partial U(\theta_0)}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial U(\theta_0)}{\partial\theta_k}\Bigr)'$, o (x,y) žymi skaliarinę sandaugą, $P - \lim$ žymi konvergavimą pagal tikimybę.

Iš apibendrintos Niutono–Leibnico formulės pritaikymo normuotose erdvėse gauname sekantį rezultatą.

2 teorema. [3] *Jei atsitiktinė funkcija* $U(\theta) = (U_t(\theta)) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Theta)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \Theta \subset R^k$, $k \geqslant 1$, *– atvira aibė, tolydžiai diferencijuojama pagal* $\theta \in \Theta$ *(Frešė prasme) pagal* P*-tikimybę erdvėje* $L^2_{loc}(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, *tai erdvėje* $L^2_{loc}(A)$ *galioja formulė*

$$U_t(\theta+u) - U_t(\theta) = \int_0^1 \bigl(\dot{U}_t(\theta+su), u\bigr)ds,$$

jei $\theta + su \in \Theta$, *kai* $0 \leqslant s \leqslant 1$, (x,y) *– skaliarinė sandauga.*

2 Diskrečiųjų martingalų asimptotinė įverčių teorija

Suformuluosime sąlygas, kuriomis toliau naudosimės.

1B. Sakykime, kad $\frac{d\nu(y)}{d\nu(\theta)} = V(y,\theta)$ yra $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{E}$ – tokia mačioji griežtai teigiama funkcija, kad su visais $t \in R_+$, $\theta, y \in \Theta$, P_y-b.v.,

$$\big(1 - \sqrt{V(y,\theta)}\,\big)^2 * \nu(\theta)_t < \infty, \quad V(\theta,\theta) = 1.$$

2B. Kiekvienam $\theta \in \Theta$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad funkcijos $V(y,\theta) = V_s(y,\theta,x)$ ir $\ln V(y,\theta) = \ln V_s(y,\theta,x)$, $s \in R_+$, $x \in E$, yra tolydžiai diferencijuojamos (Frešė prasme) taške $y \in U_\delta(\theta) = \{x : |x-\theta| < \delta\}$ erdvėje $L^2_{loc}(\nu(\theta))$ pagal P_θ-tikimybę ir $\dot V(y,\theta) = (\dot V^1_s(y,\theta,x),\ldots,\dot V^k_s(y,\theta,x))'$, $s \in R_+$, $x \in E$, yra (Frešė) išvestinė taške y, o $\frac{\dot V(y,\theta)}{V(y,\theta)} \in L^{2,(k)}_{loc}(\nu(\theta),\mathbb{F},P_\theta)$.

Jei A yra $k \times k$ matrica, o $x, y \in R^k$, tai žymėsime $|A| = (trAA')^{\frac12}$, $|x| = \big(\sum_{i=1}^k x_i^2\big)^{\frac12}$, o (x,y) – skaliarinę vektorių x ir y sandaugą.

Fišerio informaciją žymėsime $I_t(\theta) = \mathbb{E}_\theta \dot V(\theta,\theta)(\dot V(\theta,\theta))' * \nu(\theta)_t$, $\varphi_t(\theta) = [I_t(\theta)]^{-\frac12}$, $\theta_u = \theta + u\varphi_t(\theta)$, $U_{\theta,t} = \{u \in R^k : \theta_u \in \Theta\}$, $\theta \in \Theta$, $t \in R_+$.

3B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\theta\in K} \big|\varphi_t(\theta)\big| = 0.$$

4B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ tolygiai pagal $\theta, y \in K$ egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(y)\varphi_t(\theta) = B(y,\theta),$$

kur ribinė matrica $B(y,\theta)$ yra tolydi pagal $\theta \in K$.

5B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty} \varphi_t(\theta)\big[\dot V(\theta,\theta)\big(\dot V(\theta,\theta)\big)' * \nu(\theta)_t\big]\varphi_t(\theta) = I_k;$$

čia I_k – vienetinė $k \times k$ matrica.

6B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ ir tam tikram $\delta \in (0,1]$ tolygiai su visais $\theta \in K$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\theta \big|\varphi_t(\theta)\dot V(\theta,\theta)\big|^{2+\delta} * \nu(\theta)_t = 0.$$

7B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in R_+} \sup_{\theta\in K} P_\theta\big\{tr\big\{\varphi_t(\theta)\big[\dot V(\theta,\theta)\big(\dot V(\theta,\theta)\big)' * \nu(\theta)_t\big]\varphi_t(\theta)\big\} > N\big\} = 0.$$

8B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ egzistuoja konstantos $B = B(K) > 0$ ir $a = a(K) \geqslant 0$ tokios, kad tam tikram $m > \frac{k}{2}$

$$\sup_{\theta\in K} \sup_{\substack{|u|\leqslant R\\ |v|\leqslant R}} \mathbb{E}_{\theta_u}\bigg[\bigg(\bigg|\varphi_t(\theta)\frac{\dot V(\theta_u,\theta_v)}{V(\theta_u,\theta_v)}\bigg|^2 * \nu(\theta_u)_t\bigg)^m + \bigg|\varphi_t(\theta)\frac{\dot V(\theta_u,\theta_v)}{V(\theta_u,\theta_v)}\bigg|^{2m} * \nu(\theta_u)_t\bigg] \leqslant B\big(1+R^a\big)$$

visiems $R > 0$ ir $t \geqslant t_0 = t_0(K)$.

9B. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ egzistuoja konstantos $\gamma = \gamma(K) > 0$, $c = c(K) > 0$ ir $t_0 = t_0(K) > 0$ tokios, kad

$$\mathbb{E}_{\theta_u}\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t \geqslant c|u|^\gamma$$

su visais $u \in U_{\theta,t}$, $\theta \in K$ ir $t > t_0$.

1 lema. [12] *Tarkime, kad tenkinamos 1B–3B ir 5B–7B sąlygos ir $K \subset \Theta$ yra kompaktas. Tada su visais $u \in U_{\theta,t}$ galioja*

$$Z_{t,\theta}(u) := Z_t(\theta_u,\theta) = \frac{dP^t_{\theta_u}}{dP^t_\theta} = \exp\bigg\{u'(\eta_{t,\theta} + \delta_{t,\theta}) - \frac{1}{2}u'(I_k + a_{t,\theta})u\bigg\},$$

kur $\eta_{t,\theta} = \varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta) * (\mu - \nu(\theta))_t \in \mathcal{M}^{2,(k)}_{loc}(\mathbb{F}, P_\theta)$, $\mathcal{L}(.\eta_{t,\theta}|P_\theta) \Rightarrow N(0, I_k)$, $t \to \infty$, tolygiai su visais $\theta \in K$, o $\delta_{t,\theta}$ ir $a_{t,\theta}$ (žr. [12], kur 5 teoremos įrodyme atitinkamai žymima $d_t(\theta)$ ir $g_t(\theta)$) yra tokie vektorius ir matrica, kad tolygiai pagal $\theta \in K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty}\big(|\delta_{t,\theta}| + |a_{t,\theta}|\big) = 0.$$

Čia $\Rightarrow$ žymi silpną konvergavimą, o I_k – vienetinę $k \times k$ matricą.

2 lema. *Tarkime, kad tenkinamos 1B, 2B ir 8B sąlygos ir $K \subset \Theta$ yra kompaktas. Tada tam tikram $m > \frac{k}{2}$ egzistuoja konstantos $B = B(K) > 0$ ir $a = a(K) \geqslant 0$ tokios, kad su visais $R > 0$ ir $t \geqslant t_0 = t_0(K)$*

$$\sup_{\theta\in K}\sup_{\substack{|u_1|\leqslant R\\|u_2|\leqslant R}} |u_2 - u_1|^{-2m}\mathbb{E}_\theta\Big|\big[Z_{t,\theta}(u_2)\big]^{\frac{1}{2m}} - \big[Z_{t,\theta}(u_1)\big]^{\frac{1}{2m}}\Big|^{2m} \leqslant B(1 + R^a).$$

2 lemos įrodymas analogiškas Lemma 2 [10] įrodymui, nes naudojamas Frešė diferencijuojamumas iš esmės nieko nekeičia.

3 lema. *Tarkime, kad tenkinamos 1B ir 9B sąlygos ir $K \subset \Theta$ yra kompaktas. Tada kiekvienam $N > 0$ egzistuoja konstantos $c = c(N,K)$ ir $t_0 = t_0(N,K)$ tokios, kad*

$$|u|^N\mathbb{E}_\theta\big[Z_{t,\theta}(u)\big]^{\frac{1}{2}} \leqslant c < \infty$$

su visais $\theta \in K$ ir $u \in U_{\theta,t}$, $t > t_0$.

Įrodymas. Taikydami Ito formulę procesui $L_t = Z^{\frac{1}{2}}_{t,\theta}(u)$, kaip buvo taikoma [18] 4.2.4 teoremos įrodyme, gauname

$$L_t = 1 + L_-\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big) * \big(\mu - \nu(\theta)\big)_t - \frac{1}{2}L\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t.$$

Paėmę abiejų pusių matematinį vidurkį ir pasinaudoję tuo, kad martingalo vidurkis lygus 0, gauname

$$\mathbb{E}_\theta L_t = 1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta L\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t.$$

Pagal L_t apibrėžimą,

$$\mathbb{E}_\theta L_t^2 = \mathbb{E}_\theta Z_{t,\theta}(u) = 1.$$

Dėl $Z_{t,\theta}(u)$ išraiškos akivaizdu, kad ir $L_t > 0$. Pasinaudodami tuo, 9B sąlyga ir akivaizdžiu sąryšiu

$$L_t^2 dP_\theta^t = \frac{dP_{\theta_u}^t}{dP_\theta^t} dP_\theta^t = dP_{\theta_u}^t$$

gauname

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta L_t &= 1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta L\,\mathbb{I}(0 < L \leqslant 1)\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta L\,\mathbb{I}(L > 1)\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t \\
&\leqslant 1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta L^2\,\mathbb{I}(0 < L \leqslant 1)\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t \\
&= 1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\theta_u}\mathbb{I}(0 < L \leqslant 1)\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t \\
&\leqslant 1 - \frac{1}{2}\tilde{c}\,\mathbb{E}_{\theta_u}\big(\sqrt{V(\theta_u,\theta)} - 1\big)^2 * \nu(\theta)_t \\
&\leqslant 1 - c|u|^\gamma \leqslant e^{-c|u|^\gamma};
\end{aligned}$$

čia konstanta $\tilde{c} \in (0,1]$. Remiantis tuo gaunamas 3 lemos rezultatas. □

3 teorema. *Tarkime, kad tenkinamos B sąlygos, išskyrus 4B. Tegu $\hat{\theta}_t$ yra maksimalaus tikėtinumo įvertis* (MTI). *Tada kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ galioja teiginiai*:

1) $P_\theta - \lim_{t\to\infty} \hat{\theta}_t = \theta$ *tolygiai pagal* $\theta \in K$,
2) $\mathcal{L}(\varphi_t^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_t - \theta)|P_\theta) \Rightarrow N(0, I_k)$, $t \to \infty$, *tolygiai pagal* $\theta \in K$,
3) *kiekvienai funkcijai* $l(x) : R^k \to R^1$, *turinčiai polinominę mažorantę,*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\theta l\big(\varphi_t^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_t - \theta)\big) = \mathbb{E}l(\eta)$$

tolygiai pagal $\theta \in K$, *kur* η *yra* k*-matis atsitiktinis vektorius, kuriam* $\mathcal{L}(\eta|P) = N(0, I_k)$.

Jei 4B sąlyga taip pat tenkinama, tada nuostolių funkcijai $l_t(x) = l(\varphi_t^{-1}(\theta_0 x))$, $t \in R_+$, *įvertis* $\hat{\theta}_t$ *yra asimptotiškai efektyvus aibėje* K *su visais* $\theta_0 \in K$, $l \in W_p$.

4 teorema. *Tarkime, kad tenkinamos 3 teoremos sąlygos su $m = 1$ 8B sąlygoje. Tegu $\tilde{\theta}_t$ yra parametro θ Bajeso įvertis atžvilgiu apriorinio tankio $q(\theta)$ ir nuostolių funkcijos $l_t(x) = l(\varphi_t^{-1}(\theta_0 x))$, $x \in R^k$, $t \in R_+$, kur $l \in \tilde{W}_p$, ir θ_0 yra bet kuris fiksuotas taškas iš Θ. Tada įvertis $\tilde{\theta}_t$ tenkina visas MTI savybes iš 3 teoremos.*

W_p ir $\tilde{W}_p$ apibrėžimus galima rasti [10].

3 ir 4 teoremų įrodymai išplaukia iš 1, 2 ir 3 lemų teiginių, atsižvelgiant į [10] pastabas.

3 Atstatymo procesas

Nagrinėsime skaičiuojantįjį procesą

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}(T_n \leqslant t), \quad t \geqslant 0,$$

kurio tarpiniai atstatymo momentai $X_n = T_n - T_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ $(T_0 = 0)$ nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija

$$F(\theta, t) = P_\theta(X_1 \leqslant t) = \int_0^t p(\theta, s)ds, \quad \theta \in \Theta \subset R^k.$$

Tada proceso N_t $(\mathbb{F}^N, P_\theta)$-kompensatorius turi tokią išraišką ([10]):

$$\nu_t(\theta) = \int_0^t h(\theta, L_s)ds = \sum_{i=1}^{N_{t-}} H(\theta, X_i) + H(\theta, L_t),$$

kur $L_s = s - T_{N_{s-}}$, $h(\theta, t) = \frac{p(\theta,t)}{1-F(\theta,t)}$, $H(\theta, t) = \int_0^t h(\theta, s)ds$, $F(\theta, t) = 1 - e^{-H(\theta,t)}$, $H(\theta, t) = -\ln(1 - F(\theta, t))$, $\theta \in \Theta$.

4 lema. [10] *Jei su visais* $\theta \in \Theta$

$$0 < a(\theta) \equiv \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty, \qquad 0 < b(\theta) \equiv \mathbb{E}_\theta u(\theta, X_1) < \infty,$$

tai

$$P_\theta\Big(\lim_{t\to\infty} \Psi_t^{-1}(\theta) Y_t(\theta) = 1\Big) = 1;$$

čia $\Psi_t(\theta) = \frac{tb(\theta)}{a(\theta)}$, $Y_t(\theta) = \int_0^t u(\theta, L_s)d\nu_s(\theta)$, $L_s = s - T_{N_{s-}}$.

1 išvada. *Tarkime, kad visiems* $\theta \in \Theta$

$$0 < a(\theta) \equiv \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty, \qquad \mathbb{E}_\theta \left|\frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)}\right|^2 < \infty.$$

Tada

$$P_\theta\Big(\lim_{t\to\infty} \Psi_t^{-1}(\theta) I_t(\theta) = I(\theta)\Big) = 1;$$

čia $\Psi_t(\theta) = \frac{t}{a(\theta)}$, $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \frac{\dot{h}(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big(\frac{\dot{h}(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big)'$,

$$I_t(\theta) = \mathbb{E}_\theta \int_0^t \frac{\dot{h}(\theta, L_s)}{h(\theta, L_s)}\left(\frac{\dot{h}(\theta, L_s)}{h(\theta, L_s)}\right)' d\nu_s(\theta) = \mathbb{E}_\theta \frac{\dot{h}(\theta)}{h(\theta)}\left(\frac{\dot{h}(\theta)}{h(\theta)}\right)' * \nu(\theta)_t.$$

Todėl natūralu Fišerio informacija laikyti

$$I_t(\theta) := \frac{t}{a(\theta)} I(\theta),$$

kur $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1$, $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \frac{\dot{h}(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big(\frac{\dot{h}(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big)'$.

2 išvada. *Tarkime, kad visiems* $\theta \in \Theta$

$$0 < a(\theta) \equiv \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty, \qquad \mathbb{E}_\theta \big| f(\theta, X_1) \big|^2 < \infty, \qquad \mathbb{E}_\theta \big| \dot f(\theta, X_1) \big|^2 < \infty.$$

Tada P_θ*-b.v., kai* $t \to \infty$,

$$\begin{aligned} &\big\| f(\theta + h) - f(\theta) - h' \dot f(\theta) \big\|_{\nu_t(\theta)} \\ &\quad = \bigg(\int_0^t \big[f(\theta + h, L_s) - f(\theta, L_s) - h' \dot f(\theta, L_s) \big]^2 d\nu_s(\theta) \bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \sim \bigg(\frac{t}{a(\theta)} \mathbb{E}_\theta \big[f(\theta + h, X_1) - f(\theta, X_1) - h' \dot f(\theta, X_1) \big]^2 \bigg)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Iš 2 išvados seka, kad atsitiktinės funkcijos $f(\theta, L_s)$, $\theta \in \Theta \subset R^k$, diferencijavimas (Frešė prasme) taške θ erdvėje $L^2_{loc}(\nu(\theta))$ pagal P_θ-tikimybę ekvivalentus atsitiktinės funkcijos $f(\theta, X_1)$ diferencijavimui taške θ $\mathbb{E}_\theta$ vidurkio kvadrato prasme, pagal kurį egzistuoja tokia vektorinė funkcija $\dot f(\theta, X_1)$, kad $\mathbb{E}_\theta |\dot f(\theta, X_1)|^2 < \infty$, $\mathbb{E}_\theta |f(\theta, X_1)|^2 < \infty$ ir

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|^2} \mathbb{E}_\theta \big[f(\theta + h, X_1) - f(\theta, X_1) - h' \dot f(\theta, X_1) \big]^2 = 0.$$

3.1 Bendrųjų B sąlygų prastinimas atstatymo proceso atveju

1B sąlygoje kompensatorius dabar turi tokią išraišką:

$$\nu_t(\theta) = \int_0^t h(\theta, L_s) ds, \quad L_s = s - T_{N_{s-}}.$$

Todėl $d\nu_t(\theta) = h(\theta, L_t)dt$ ir

$$V_t(y, \theta) = \frac{d\nu_t(y)}{d\nu_t(\theta)} = \frac{h(y, L_t)}{h(\theta, L_t)}.$$

Kadangi

$$\big(1 - \sqrt{V(y, \theta)}\,\big)^2 * \nu(\theta)_t = \int_0^t \bigg(1 - \sqrt{\frac{h(y, L_s)}{h(\theta, L_s)}}\bigg)^2 d\nu_s(\theta) \leqslant 2\big(\nu_t(\theta) + \nu_t(\theta_0)\big),$$

o $\nu_t(\theta) = \int_0^t h(\theta, L_s) ds \leqslant \int_0^t h(\theta, s) ds$, tai 1B sąlyga tenkinama, kai galioja

1C. $\int_0^t h(\theta, s) ds < \infty$, $\theta \in \Theta$, $t \in R_+$.

Remiantis 4 lema ir jos išvadomis, 2B sąlyga tenkinama, kai galioja

2C. Kiekvienam $\theta \in \Theta \subset R^k$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad funkcijos $h(y, X_1)$ ir $\ln h(y, X_1)$ tolydžiai diferencijuojamos $\mathbb{E}_\theta$ vidurkio kvadrato prasme taške $y \in U_\delta(\theta) = \{x : |x - \theta| < \delta\}$ ir jos išvestinė $\dot h(y, X_1)$

$$\dot h(y, \cdot) = \bigg(\frac{\partial h(\theta, \cdot)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial h(\theta, \cdot)}{\partial \theta_k} \bigg)' \bigg|_{\theta = y}$$

tokia, kad $0 < a(y) = \mathbb{E}_y X_1 < \infty$, $\mathbb{E}_\theta |\dot h(y, X_1)|^2 < \infty$, $\mathbb{E}_\theta |\frac{\dot h(y, X_1)}{h(y, X_1)}|^2 < \infty$, kai $y \in U_\delta(\theta)$.

Kadangi Fišerio informacija laikome $I_t(\theta) = \frac{t}{a(\theta)} I(\theta)$, kur $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1$ ir $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \frac{\dot h(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)} \Big(\frac{\dot h(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big)'$, tai papildomai reikalaujame, kad $0 < a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty$, kuri iš tikrųjų yra tenkinama, nes $0 < a(y) = \mathbb{E}_y X_1 < \infty$, kai $y \in U_\delta(\theta)$.

3B sąlyga yra tenkinama, nes

$$\varphi_t(\theta) = \big[I_t(\theta)\big]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a(\theta)}{tI(\theta)}},$$

ir todėl, galiojant 2C sąlygai,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\theta\in K} \big|\varphi_t(\theta)\big| = \sup_{\theta\in K} \left|\sqrt{\frac{a(\theta)}{I(\theta)}}\right| \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0.$$

Kadangi 4B sąlygoje turime

$$B(y,\theta) = \lim_{t\to\infty} \varphi_t^{-1}(y)\varphi_t(\theta) = \big(a(\theta)a(y)^{-1} I(y) I(\theta)^{-1}\big)^{\frac{1}{2}},$$

tai ji bus tenkinama, kai

3C. Funkcija $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1$ ir matrica $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \frac{\dot h(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)} \Big(\frac{\dot h(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big)'$ yra tolydžios pagal θ, kai $\theta \in K \subset \Theta$, o K – bet kuris kompaktas iš Θ.

Kadangi

$$\dot V(\theta,\theta)\big(\dot V(\theta,\theta)\big)' * \nu(\theta)_t = \int_0^t \frac{\dot h(\theta,L_s)}{h(\theta,L_s)} \left(\frac{\dot h(\theta,L_s)}{h(\theta,L_s)}\right)' d\nu_s(\theta) \sim \frac{t}{a(\theta)} I(\theta),$$

P_θ-b.v., kai $t\to\infty$, tai 5B sąlyga tenkinama iš karto.

Tikriname 6B sąlygą.

Remiantis 4 lema,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\theta |\varphi_t(\theta)\dot V(\theta,\theta)|^{2+\delta} * \nu(\theta)_t &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\theta \left|\sqrt{\frac{1}{t}\frac{a(\theta)}{I(\theta)}}\frac{\dot h(\theta)}{h(\theta)}\right|^{2+\delta} * \nu(\theta)_t \\ &= C(\theta) \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0,\end{aligned}$$

kai $C(\theta)$ – tam tikra baigtinė konstanta, $\delta \in (0,1]$, $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty$ ir $\mathbb{E}_\theta \Big|\frac{\dot h(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big|^{2+\delta} < \infty$, kai $\theta \in K$, $\delta \in (0,1]$.

Todėl 6B sąlyga tenkinama, kai

4C. Kiekvienam kompaktui $K \subset \Theta$ ir tam tikram $\delta \in (0,1]$ $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty$, $\mathbb{E}_\theta \Big|\frac{\dot h(\theta,X_1)}{h(\theta,X_1)}\Big|^{2+\delta} < \infty$, kai $\theta \in K$.

Tikriname 7B sąlygą.

Kadangi pagal 4 lemos 1 išvadą

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\theta \varphi_t(\theta) \frac{\dot h(\theta)}{h(\theta)} \left(\frac{\dot h(\theta)}{h(\theta)}\right)' * \nu(\theta)_t \varphi_t(\theta) = I_k,$$

tai 7B sąlyga tenkinama automatiškai.

8B sąlygos nelygybė atstatymo proceso atveju (žr. [10]) įgis tokią išraišką:

$$\sup_{\theta\in K}\sup_{|u|\leqslant R}\mathbb{E}_{\theta_u}[(|\varphi_t(\theta)\frac{\dot h(\theta_u)}{h(\theta_u)}|^2*\nu(\theta_u)_t)^m+|\varphi_t(\theta)\frac{\dot h(\theta_u)}{h(\theta_u)}|^{2m}*\nu(\theta_u)_t]\leqslant B(1+R^a).$$

Kadangi pagal 4 lemos 1 išvadą

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_u}\left(\left|\varphi_t(\theta)\frac{\dot h(\theta_u)}{h(\theta_u)}\right|^2*\nu(\theta_u)_t\right)^m &\leqslant \left(\left|\varphi_t(\theta)\right|^2\frac{t}{a(\theta_u)}\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\frac{\dot h(\theta_u,X_1)}{h(\theta_u,X_1)}\right|^2\right)^m\\ &\sim\left(\frac{a(\theta)}{a(\theta_u)}\frac{1}{|I(\theta)|}\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\frac{\dot h(\theta_u,X_1)}{h(\theta_u,X_1)}\right|^2\right)^m,\quad \text{kai } t\to\infty.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\varphi_t(\theta)\frac{\dot h(\theta_u)}{h(\theta_u)}\right|^{2m}*\nu(\theta_u)_t\sim\left|\varphi_t(\theta)\right|^{2m}\frac{t}{a(\theta_u)}\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\frac{\dot h(\theta_u,X_1)}{h(\theta_u,X_1)}\right|^{2m}\to 0,$$

kai $t\to\infty$ ir $m>1$, nes $t|\varphi_t(\theta)|^{2m}\sim\frac{t}{t^m}c(\theta)\to 0$, kai $t\to\infty$, o $c(\theta)$ – tam tikra baigtinė konstanta.

Kai $m=1$,

$$\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\varphi_t(\theta)\frac{\dot h(\theta_u)}{h(\theta_u)}\right|^{2m}*\nu(\theta_u)_t=\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\varphi_t(\theta)\frac{\dot h(\theta_u)}{h(\theta_u)}\right|^{2}*\nu(\theta_u)_t\sim\frac{a(\theta)}{a(\theta_u)|I(\theta)|}\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\frac{\dot h(\theta_u,X_1)}{h(\theta_u,X_1)}\right|^2.$$

Vadinasi, 8B sąlyga tenkinama, kai

5C. Kiekvienam kompaktui $K\subset\Theta$ egzistuoja tokios konstantos $B=B(K)>0$ ir $a=a(K)\geqslant 0$, kad tam tikram $m>\frac{k}{2}$ ir visiems $R>0$ ir $t\geqslant t_0=t_0(K)$

$$\sup_{\theta\in K}\sup_{\substack{|u|\leqslant R\\ u\in U_{\theta,t}}}\frac{1}{a(\theta_u)}\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\frac{\dot h(\theta_u,X_1)}{h(\theta_u,X_1)}\right|^2\leqslant B(1+R^a)^{\frac{1}{m}}.$$

Pastebėsime, kad 9B sąlyga atstatymo proceso atveju virsta į

9B′. Kiekvienam kompaktui $K\subset\Theta$ egzistuoja konstanta $c=c(K)>0$ ir $t_0=t_0(K)>0$ tokie, kad

$$\mathbb{E}_{\theta_u}\left(\sqrt{\frac{h(\theta_u)}{h(\theta)}}-1\right)^2*\nu(\theta)_t\geqslant c|u|^2$$

su visais $u\in U_{\theta,t}$, $\theta\in\Theta$ ir $t>t_0$.

Suprastinkime tą sąlygą:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_u}\left(\sqrt{\frac{h(\theta_u)}{h(\theta)}}-1\right)^2*\nu(\theta)_t &=\mathbb{E}_{\theta_u}\left(\int_0^t\sqrt{\frac{h(\theta_u,L_s)}{h(\theta,L_s)}}-1\right)^2d\nu_s(\theta)\\ &=\mathbb{E}_{\theta_u}\int_0^t\frac{(\sqrt{h(\theta_u,L_s)}-\sqrt{h(\theta,L_s)})^2}{h(\theta,L_s)}h(\theta,L_s)ds\\ &=\mathbb{E}_{\theta_u}\int_0^t\frac{(\sqrt{h(\theta_u,L_s)}-\sqrt{h(\theta,L_s)})^2}{h(\theta_u,L_s)}d\nu_s(\theta_u)\\ &\geqslant\frac{1}{8}|u|^2\left|\varphi^2(\theta)\right|\mathbb{E}_{\theta_u}\int_0^t\left|\frac{\dot h(\theta_u,L_s)}{h(\theta_u,L_s)}\right|^2d\nu_s(\theta_u)\\ &\geqslant\frac{1}{8}|u|^2\left|\frac{a(\theta)}{a(\theta_u)}\right|\frac{1}{|I(\theta)|}\mathbb{E}_{\theta_u}\left|\frac{\dot h(\theta_u,X_1)}{h(\theta_u,X_1)}\right|^2=c|u|^2\end{aligned}$$

su tam tikra baigtine ir teigiama konstanta c.

Vadinasi, 9B′ sąlyga tenkinama, kai galioja 2C ir 5C sąlygos.

Literatūra

[1] P. Bickel, Ch. Klaassen, Y. Ritov, J. Wellner. *Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models.* Springer, New York, 1998.

[2] L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. Statist.*, **3**, 1960.

[3] N. Diadko. *Freše diferencijuojamumas pagal tikimybę reguliariuose statistiniuose eksperimentuose.* Magistro darbas, Šiauliai, 2015.

[4] J. Hajek. A characterization of limiting distributions of regular estimates. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, **14**, 1970.

[5] J. Hajek. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. *Proc. 6th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, 1972.

[6] I.A. Ibragimov, R.Z. Khas'minskii. Local asymptotic normality for non-identically distributed observations. *Theory Probab. Appl.*, **20**(2):246–260, 1976. https://doi.org/10.1137/1120032.

[7] I.A. Ibragimov, R.Z. Khas'minskii. *Statistical Estimation: Asymptotic Theory.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[8] J. Jacod, A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[9] Yu.M. Kabanov, R.Sh. Liptser, A.N. Shiryaev. Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. II. *Math. USSR-Sb.*, **36**(1):31–58, 1980. https://doi.org/10.1070/SM1980v036n01ABEH001760.

[10] V. Kanišauskas. Asymptotic parameter estimation for multivariate point processes. *Lith. Math. J.*, **37**(4):352–363, 1997. https://doi.org/10.1007/BF02465576.

[11] V. Kanišauskas. *Atsitiktinių procesų asimptotinis parametrų įvertinimas ir paprastų hipotezių atskyrimas.* Daktaro disertacija, Vilnius, 1998.

[12] V. Kanišauskas. Diskrečiųjų martingalų statistinių modelių lokalus asimptotinis normalumas. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **64**:30–40, 2023. https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33592.

[13] Yu.A. Kutoyants. Estimation of signal parameter in Gaussian noise. *Probl. Inf. Transm.*, **13**(4):266–271, 1977.

[14] Yu.A. Kutoyants. Locally asymptotic normality for processes of Poisson. *Izv. Ak. Nauk Armyanskoi SSSR. Matematika*, **14**(1):3–20, 1979.

[15] Yu.A. Kutoyants. *Estimating the parameters of random processes.* Armenian Academy of Sciences, Yerevan, 1980.

[16] Yu.A. Kutoyants. Estimating the parameters for Poisson type processes. *Izv. Ak. Nauk Armyanskoi SSSR. Matematika*, **19**(3):233–241, 1984.

[17] Yu.N. Lin'kov. On estimates of parameters of counting processes. *Probl. Inf. Transm.*, **18**(1):63–76, 1982.

[18] Yu.N. Lin'kov. *Asymptotic Statistical Methods for Stochastic Processes.* American Mathematical Society, 2001.

[19] A.F. Taraskin. Lokal'naja asimptotičeskaja bezgraničnaja delimost' semejstv markovskich processov. *Teorija slučajnych processov*, **13**, 1985.

[20] A. Wald. Asymptotic most powerful tests of statistical hypotheses. *An. Math. Stat.*, **12**, 1941.

SUMMARY

Asymptotic estimation for statistical models of continuous-time discrete martingales

V. Kanišauskas, K. Kanišauskienė

The paper deals with statistical experiments of the continuous-time discrete local martingales, including models of all types of point processes. The process of local density of the discrete local martingales is expressed by a stochastic exponent of the stochastic integral according to the compensated point measure. General conditions convenient for testing are determined to assure continuous validity of the maximum probability and Bayesian estimators, as well as the continuous asymptotic normality and the asymptotic minimaxity in each compact of the parametric set. The research applies the optimum Fréchet differentiation of random and parametric functions based on the probability in normed spaces in terms of a continuous compensator. It is demonstrated how the basic conditions become much simpler in the case of the renewal process with the continuous compensator.

Keywords: continuous-time discrete local martingale; local asymptotic normality; compensator; differentiation in normed spaces