LMD mokslo darbai, 127–131
1998, Vilnius

Kvazitiesinių hiperbolinių sistemų asimptotika

A. Krylovas (VGTU)

Įvadas

Diferencialinių lygčių vidurkinimo principas buvo taikomas dar Ž. Lagranžo bei K. Gauso darbuose. Klasikiniai N.N. Bogoliubovo darbai padarė vidurkinimo principą galingu asimptotinės analizės metodu. Silpnai netiesinės sistemos su dalinėmis išvestinėmis

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\lambda_j\frac{\partial u_j}{\partial x}=\varepsilon f_j(t,x,U),\quad j=1,2,\dots,n\ ,\tag{0}$$

kai ε yra mažas parametras, modeliuoja bėgančiųjų bangų $u_j(x-\lambda_j t)$ sąveiką ir apibendrina standartines (N.N. Bogoliubovo prasme) paprastųjų diferencialinių lygčių sistemas (kadangi sutampa su pastarosiomis, kai $\lambda_j=0$). J.A. Mitropolskio ir G.P. Chomos darbuose [1], I.M. Vulpės darbe [2] buvo siūlomos įvairios vidurkinimo schemos, kai (0) sistemoje funkcijos f_j integruojamos tik pagal kintamuosius t,x. Toks vidurkinimas netinka, pavyzdžiui, sistemoms su vidiniais rezonansais:

$$u_j(0,x)=u_{0j}(x)\equiv u_{0j}(x+2\pi)$$

ir koeficientų λ_j santykiai $\dfrac{\lambda_j-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_k}$ yra racionalieji skaičiai. Toks (0) sistemos atvejis buvo išnagrinėtas A.L. Štaro darbe [3], kur pasiūlyta integruoti f_j pagal netiesiogiai įeinančius kintamuosius t,x. Šita vidurkinimo schema vėliau buvo apibendrinta autoriaus darbuose [4–8] ir pavadinta *vidiniu vidurkinimu.*

1. Nagrinėjama pirmos eilės kvazitiesinių diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistema

$$U_t+A(U)U_x=0,\tag{1}$$

$$U=(u_1,u_2,\dots,u_n),\ A=\|a_{ij}\|_{n\times n}$$

su pradinėmis sąlygomis

$$U(0,x;\varepsilon)=U_0(\varepsilon x)+\varepsilon U_1(\varepsilon x,x),\ 0<\varepsilon<<1.\tag{2}$$

Pažymėkime $U(t,x;\varepsilon) = U^0(\tau,\xi) + \varepsilon U^1(t,x;\varepsilon)$, $\tau = \varepsilon t$, $\xi = \varepsilon x$ ir perrašykime (1) lygtį taip:

$$\varepsilon\left(U_\tau^0 + A(U^0)U_\xi^0\right) + \varepsilon\left(U_t^1 + A(U^0)U_x^1\right) = \varepsilon^2 G(U^0, U_\xi^0, U^1, U_x^1) + o(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Čia

$$G = (g_1, g_2, \ldots, g_n),\ g_i = -\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)}{\partial u_k^0}u_k^1\right)\cdot\left(\frac{\partial u_j^0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_j^1}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Taikydami (3) lygčiai (2) pradines sąlygas, gauname Koši uždavinius funkcijoms U^0 ir U^1 rasti:

$$U_\tau^0 + A(U^0)U_\xi^0 = 0, U^0(0,\xi) = U_0(\xi), \tag{5}$$

$$U_t^1 + A_0 U_x^1 = \varepsilon G_0, U^1(0,x;\varepsilon) = U_1(\varepsilon x, x). \tag{6}$$

Čia $A_0 = A(U^0)\Big|_{\substack{\tau=\varepsilon t\\ \xi=\varepsilon x}}, G_0 = G\Big|_{\substack{\tau=\varepsilon t\\ \xi=\varepsilon x}}$.

Tarkime, kad (5) uždavinys turi klasikinį sprendinį $U^0(\tau,\xi) \in C^1(D_0)$, $D_0 = \{(\tau,\xi): 0 \le \tau + |\xi| \le c_0\}, c_0$ – teigiama konstanta ir apsiribosime hiperbolinėmis sistemomis, t.y. matrica $R(\tau,\xi)$, sudaryta iš matricos A_0 tikrinių vektorių, yra neišsigimusi ir tenkina sąlygą:

$$R^{-1}A_0 R = \Lambda(\tau,\xi) = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}. \tag{7}$$

Tada (6) sistema užrašoma Rymano invariantais:

$$L_j^{(t,x)}u_j \equiv \frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(\varepsilon t, \varepsilon x)\frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(\varepsilon t, \varepsilon x, U, U_x), \tag{8}$$

$$u_j(0,x;\varepsilon) = u_{0j}(\varepsilon x, x),\ j = 1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

Čia $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = R^{-1}U^1$, $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) = R^{-1}(G_0 - R_\tau U - A_0 R_\xi U)$,

$$(u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0n}) = R^{-1}(0, \varepsilon x)U_1(\varepsilon x, x).$$

2. Pažymėkime $L_j^{(\tau,\xi)} \equiv \frac{\partial}{\partial} + \lambda_j(\tau,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}$ ir išnagrinėkime n tarpusavyje nepriklausomų lygčių:

$$L_j^{(\tau,\xi)} w_j = h_j(\tau,\xi),\ w_j(0,\xi) = 0,\ j = 1,2,\dots,n. \tag{10}$$

Tarkime, kad funkcijos $\xi_j(s;\tau,\xi)$ yra tokių paprastųjų diferencialinių lygčių sprendiniai:

$$\frac{d\xi_j}{ds} = \lambda_j(s,\xi_j),\ \xi_j(\tau;\tau,\xi) = \xi. \tag{11}$$

Tada (10) lygtys integruojamos taip:

$$w_j(\tau,\xi) = \int_0^\tau h_j(s,\xi_j(s;\tau,\xi))ds. \tag{12}$$

Įveskime "greituosius" charakteristinius kintamuosius $y_j = \frac{1}{\varepsilon}\xi_j(0;\tau,\xi)$ ir ieškokime tolygiai tinkamą, kai $t + |x| = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$, (8) uždavinio asimtotinį sprendinį funkcijų $v_j(\tau,\xi,y_j)$ pavidalu. Padarykime (8) sistemoje keitinį $u_j = v_j + \varepsilon w_j(\tau,\xi;\varepsilon)$. Tada, pastebėję, kad iš (11) išplaukia $L_j^{(\tau,\xi)} y_j \equiv 0$ ir todėl $L_j^{(t,x)} v_j = L_j^{(\tau,\xi)} v_j$, gauname:

$$\varepsilon^2 L_j^{(\tau,\xi)} w_j = \varepsilon f_j(\tau,\xi,V,V_Y) - \varepsilon L_j^{(\tau,\xi)} v_j + o\left(\varepsilon^2\right) \tag{13}$$

Tarkime, kad (13) lygčių sistemoje funkcijos $v_j(\tau,\xi,y_j)$ yra žinomos ir pažymėkime $f_j(\tau,\xi,V,V_Y) = g_j(\tau,\xi,y_1,y_2,\dots,y_n)$. Tada integruodami (13) lygtį pagal (12) formulę, gauname:

$$\varepsilon w_j = \int_0^\tau g_j\left(s,\xi_j(s;\tau,\xi),\frac{1}{\varepsilon}\xi_1\left(0;s,\xi_j(s;\tau,\xi)\right),\dots,\frac{1}{\varepsilon}\xi_n\left(0;s,\xi_j(s;\tau,\xi)\right)\right)ds -$$

$$-\int_0^\tau L_j^{(\tau,\xi)} v_j\left(s,\xi_j(s;\tau,\xi),\frac{1}{\varepsilon}\xi_j\left(0;s,\xi_j(s;\tau,\xi)\right)\right)ds. \tag{14}$$

Pastebėkime, kad $\frac{\partial}{\partial s}\xi_j(0;s,\xi_j(s;\tau,\xi)) \equiv 0$ ir ieškosime tokių funkcijų $v_1,v_2,\dots,v_n$, kad būtų tenkinama sąlyga: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon w_j(\tau,\xi;\varepsilon) = 0$. Pažymėję

$$M_j^\varepsilon[g_j] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau g_j\left(s,\xi_j(s;\tau,\xi),\dots,\frac{1}{\varepsilon}\xi_k\left(0;s,\xi_j(s;\tau,\xi)\right),\dots\right)ds,$$

iš (14) formulių gauname suvidurkintųjų lygčių sistemą:

$$\int_0^\tau L_j^{(\tau,\xi)} v_j\left(s,\xi_j\left(s;\tau,\xi\right),y_j\right)ds = M_j^\varepsilon[g_j], v_j(0,\xi,y_j) = u_{0j}(\xi,y_j), j=1,2,\dots,n \tag{15}$$

funkcijoms $v_1, v_2, \dots, v_n$ rasti.

3. Išnagrinėkime (1)–(2) uždavinio atskirą atvejį, kai $U_0 \equiv const$. Tada (7) išraiškoje λ_j irgi yra konstantos ir (11) lygtys išspendžiamos taip: $\xi_j(s;\tau,\xi) = \lambda_j(s-\tau)+\xi$. Suvidurkintųjų lygčių (15) sistema perrašoma tokiu pavidalu:

$$\int_0^\tau L_j^{(\tau,\xi)} v_j\left(s,\lambda_j s - \lambda_j \tau + \xi, y_j\right)ds$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau g_j\left(s,\lambda_j s - \lambda_j\tau + \xi,\dots,y_j + \frac{1}{\varepsilon}(\lambda_j - \lambda_k)s,\dots\right)ds. \tag{16}$$

Pastaroji sistema buvo ištirta [8] darbe. Pavyzdžiui, jei funkcijos $g_j(\tau,\xi,y_1,y_2,\dots,y_n) \in C^1(D_0 \times R^n)$ yra periodinės pagal kintamuosius $y_1,y_2,\dots,y_n$, (16) sistemą galima perrašyti taip:

$$L_j^{(\tau,\xi)} v_j = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_0^T g_j\left(\tau,\xi,y_j + (\lambda_j-\lambda_1)t\dots,y_j+(\lambda_j-\lambda_n)t\right)dt. \tag{17}$$

Suformuluokime pakankamą sąlygą, kada panašiai galima supaprastinti ir (15) sistemą. Pakeiskime žymėjimus (14) išraiškoje:

$$\tilde{M}_j^\varepsilon[g_j] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau g_j\left(\tau,\xi,\frac{1}{\varepsilon}\xi_1\left(0;s,\xi_j\left(s;\gamma,\eta\right)\right)\dots,\frac{1}{\varepsilon}\xi_n\left(0;s,\xi_j\left(s;\gamma,\eta\right)\right)\right)ds. \tag{18}$$

Jei (18) vidurkinimo rezultatas nepriklauso nuo kintamųjų γ,η ir egzistuoja tolygiai kintamųjų $(\tau,\xi)\in D_0$ atžvilgiu, tai (15) sistemą užrašome pavidalu: $L_j^{(\tau,\xi)} v_j = \tilde{M}_j^\varepsilon[g_j]$, kai nereikia integruoti pagal τ. Panašiai kaip ir [8], tokios sistemos gali būti ir daugiau supaprastintos įvairioms (ne tik periodinėms) pradinių funkcijų klasėms. Atkreipsime dėmesį į tai, kad (5) uždavinys nėra asimptotinis ir gali būti sprendžiamas skaitiniais metodais.

LITERATŪRA

[1] *Укр. мат. журн.* 1970. Т.22. С. 600-610; 1979. Т.31, №2.С. 149-156.
[2] *Дифф. уравнения.* 1982. Т.18, №11. С. 1887-1893.
[3] *ДАН СССР*. 1977. Т.237, №3. С. 525-528.
[4] *Liet. matem. rink.* 1983. **23,** Nr.4. 12-17 P.; 1984. **24,** Nr.2. 90-96 P.; 1985. **25,** Nr.2. 102-113 P.
[5] *ЖВМ и МФ*. 1986. Т. 26, №1. С. 72-79.
[6] *ПММ.* 1987. Т. 51, вып. 6. С. 933-940.
[7] *Матем. заметки.* 1989. Т. 46, вып. 6. С. 112-113.
[8] *Liet. matem. rink.* I.- 1989, **29**, Nr.4. 721-732 P.; II.- 1990, **30**, Nr.1. 88-100 P.

The asymptotics in quasi-linear hyperbolic systems

A. Krylovas

The averaging method for aymptotical solution construction in first order partial derivatives systems is described.