LMD mokslo darbai, 132–137
1998, Vilnius

Apie vieną Koši uždavinio formalaus sprendimo algoritmo apibendrinimą

Z. Navickas (KTU)

Šiame darbe pateiksime specialių tiesinių diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis su kintamais koeficientais formalų sprendimo metodą.

1°. Tegul tiesinėje erdvėje $\langle F;\ +|C\rangle$ duota tiesinė operatorinė lygtis:

$$\mathbf{A}f = \hat{f}$$

čia $\hat{f}$ – žinomas, f – ieškomas tiesinės erdvės $\langle F;\ +|C\rangle$ elementai, $f, \hat{f} \in F$, o $\mathbf{A}$: $F \to F$ – žinomas Veilio algebros [1] $\langle \mathbf{W}(F,F);\ +, \bullet \mid C\rangle$ formalus operatorius, $\mathbf{A} \in \mathbf{W}(F,F)$. Neretai dėl vienų ar kitų priežasčių yra patogiau spręsti operatorinę lygtį:

$$\mathbf{BA}f = \mathbf{B}\hat{f},$$

kai $\mathbf{B}$: $F \to F$ – pagalbinis formalus tiesinis operatorius, $\mathbf{B} \in \mathbf{W}(F,F)$. Tarkime, kad operatoriaus $\mathbf{A}$ skaidinys $\mathbf{A} \overset{def}{=} \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1$ nusako operatoriaus $\mathbf{BA}$ struktūrinį skaidinį $\mathbf{BA} = \mathbf{BA}_0 - \mathbf{BA}_1$, t.y.

$$\mathbf{BA}_0(F) \supseteq \mathbf{BA}_1(F),$$

$$\mathbf{K}_1 \overset{def}{=} \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\left(\widetilde{\mathbf{BA}_0}\right)^{-1} (\mathbf{BA}_1) \right)^r \in \mathbf{W}(F,F).$$

Priminsime, kad simboliu $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{W}(F,F)$, žymime formalaus tiesinio operatoriaus $\mathbf{C}$: $F \to F$ pseudoatvirkštinį operatorių [1] tenkinantį sąlygas:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1}, \qquad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{C}, \qquad \mathbf{C}\colon\ \tilde{\mathbf{C}}^{-1}(F) \leftrightarrow \mathbf{C}(F)\colon\ \tilde{\mathbf{C}}^{-1}.$$

Iš [1] turime, kad

$$\mathbf{K}_1^{-1} = 1 - \left(\widetilde{\mathbf{BA}_0}\right)^{-1} (\mathbf{BA}_1), \qquad \left(\widetilde{\mathbf{BA}}\right)^{-1} = \mathbf{K}_1 \left(\widetilde{\mathbf{BA}_0}\right)^{-1},$$

$$\operatorname{Ker}\mathbf{BA} = \mathbf{K}_1(\operatorname{Ker}\mathbf{BA}_0) = \operatorname{Ker}\mathbf{A} \dotplus \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\left(\operatorname{Ker}\mathbf{B} \cap \mathbf{A}(F)\right).$$

Vadinasi,

$$\operatorname{Ker}\mathbf{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{BA},$$

t.y. žinant branduolį $\operatorname{Ker}\mathbf{BA}$, galima iš jo „išskirti“ ir $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$.

2°. Sudarysime keletą specialių tiesinės erdvės $\langle F;\ +|C\rangle$ poerdvių.

Tegul $\mathbf{A}(\boldsymbol{F}) \cap (\mathrm{Ker}\,\mathbf{B} \overset{def}{=} \hat{\boldsymbol{F}}_0$. Tada galima sudaryti aibę $\hat{\boldsymbol{F}}_1$ (be to, ne vieninteliu būdu), tenkinančią sąlygas:

$$\hat{\boldsymbol{F}}_0 \cap \hat{\boldsymbol{F}}_1 = \{0\}, \qquad \hat{\boldsymbol{F}}_0 \dot{+} \hat{\boldsymbol{F}}_1 = \mathbf{A}(\boldsymbol{F}),$$

t.y. kiekvieną $\hat{f} \in \mathbf{A}(\boldsymbol{F})$ galima vienareikšmiškai (kai yra sudaryta aibė $\hat{\boldsymbol{F}}_1$), išskaidyti sekančiu būdu:

$$\hat{f} = \hat{f}_0 + \hat{f}_1, \quad \hat{f}_0 \in \hat{\boldsymbol{F}}_0, \quad \hat{f}_1 \in \hat{\boldsymbol{F}}_1. \tag{1}$$

Pažymėję $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{F}}_0) \overset{def}{=} \boldsymbol{F}_0$, $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{F}}_1) \overset{def}{=} \boldsymbol{F}_1$ turime:

$$\boldsymbol{F}_1 = (\widetilde{\mathbf{BA}})^{-1}\big(\mathbf{BA}(\boldsymbol{F})\big), \qquad \boldsymbol{F}_0 \dot{+} \boldsymbol{F}_1 = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\big(\mathbf{A}(\boldsymbol{F})\big) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\boldsymbol{F}) \overset{def}{=} (\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp},$$
$$\hat{\boldsymbol{F}}_0 = \mathbf{A}(\mathrm{Ker}\,\mathbf{BA}), \qquad \boldsymbol{F}_0 = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{BA}) \cap (\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp}.$$

Sutarsime poerdvius $\langle \boldsymbol{F}_1; +|C\rangle$ ir $\langle \hat{\boldsymbol{F}}_1; +|C\rangle$ vadinti operatoriaus $\mathbf{A}$ esminiais (šiuo atveju atžvilgiu operatoriaus $\mathbf{B}$) atitinkamai pirmavaizdžių bei atvaizdžių poerdviais, o $\langle \boldsymbol{F}_0; +|C\rangle$ ir $\langle \hat{\boldsymbol{F}}_0; +|C\rangle$ – pagalbiniais pirmavaizdžių bei atvaizdžių poerdviais.

Pastebėsime, jeigu pvz., $\mathrm{Ker}\,\mathbf{B} = \{0\}$, tai ir $\boldsymbol{F}_0 = \hat{\boldsymbol{F}}_0 = \{0\}$, o $\boldsymbol{F}_1 = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp}$, $\hat{\boldsymbol{F}}_1 = \mathbf{A}(\boldsymbol{F})$ t.y. $\mathrm{Ker}\,\mathbf{BA} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$. Tačiau bendru atveju

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \dot{+} \boldsymbol{F}_0 = \mathrm{Ker}\,\mathbf{BA}.$$

Aibė $\mathbf{BA}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{BA}(\boldsymbol{F}_1) = \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{F}}_1) \overset{def}{=} \tilde{\boldsymbol{F}}$ ir, be to, poerdvis $\langle \tilde{\boldsymbol{F}}; +|C\rangle$ yra operatoriaus $\mathbf{BA}$ atvaizdžių poerdvis, o $\langle \boldsymbol{F}_1; +|C\rangle$ – pirmavaizdžių.

3°. Tegul duoti Koši sąlygų $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ tiesinė erdvė $\langle \tilde{\boldsymbol{Q}}; +|C\rangle$ ir operatoriai $\tilde{\mathbf{T}}$ bei $\mathbf{R}$, tenkinantys sąlygas:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{F}) = \tilde{\boldsymbol{Q}}, \qquad \tilde{\mathbf{T}} : \mathrm{Ker}\,\mathbf{BA} \leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{Q}} : \mathbf{R},$$

t.y. $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{R} = 1$ tiesinėje erdvėje $\langle \tilde{\boldsymbol{Q}}; +|C\rangle$ ir, be to, $\mathrm{Ker}\,\tilde{\mathbf{T}} = \boldsymbol{F}_1$. Tada operatoriaus $\mathbf{BA}$ Koši uždavinys [1]:

$$\begin{cases} \mathbf{BA}f = \tilde{f}, & \tilde{f} \in \tilde{\boldsymbol{F}}, \ f \in \boldsymbol{F}, \\ \tilde{\mathbf{T}}f = \tilde{q}, & \tilde{q} \in \tilde{\boldsymbol{Q}}; \end{cases}$$

turės vienintelį sprendinį.

$$f = \big((\widetilde{\mathbf{BA}})^{-1} - \mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}(\widetilde{\mathbf{BA}})^{-1}\big)\tilde{f} + \mathbf{R}\tilde{q} \tag{2}$$

Jeigu sutarsime imti $\tilde{\boldsymbol{Q}} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{BA}_0$, tada $\mathbf{R} = \mathbf{K}_1$ ir $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{BA})^{-1}\tilde{f} = 0$, t.y. iš (2) pereinamybės išplaukia išraiška

$$f = \mathbf{K}_1\big((\widetilde{\mathbf{BA}_0})^{-1}\tilde{f} + \tilde{q}\big).$$

Sudarę $\boldsymbol{Q} \overset{def}{=} \tilde{\mathbf{T}}(\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})$, t.y. $\boldsymbol{Q} \subseteq \tilde{\boldsymbol{Q}}$, ir apibrėžę $\mathbf{T}$: $\mathbf{T}g_0 \overset{def}{=} \tilde{\mathbf{T}}g_0$, $g_0 \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$, $\mathbf{T}g_1 \overset{def}{=} 0$, $g_1 \in \boldsymbol{F}_0 \dot{+} \boldsymbol{F}_1$, t.y. $\mathrm{Ker}\,\mathbf{T} = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{A})^{\perp}$, galime sudaryti du Koši uždavinius:

$$\begin{cases} \mathbf{BA}\bar{f}_1 = \mathbf{B}\hat{f}_1, & \bar{f}_1 \in \tilde{\boldsymbol{F}}_1 \dot{+} \mathrm{Ker}\,\mathbf{A}, \ \hat{f}_1 \in \hat{\boldsymbol{F}}_1, ; \\ \mathbf{T}\bar{f}_1 = \hat{q}, & \hat{q} \in \boldsymbol{Q}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{A}f_0 = \hat{f}_0, & f_0 \in \boldsymbol{F}_0, \ \hat{f}_0 \in \hat{\boldsymbol{F}}_0; \\ \mathbf{T}f_0 = 0; \end{cases}$$

kurių vieninteliai sprendiniai išreiškiami pereinamybėmis

$$\bar{f}_1 = \mathbf{K}_1\big((\widetilde{\mathbf{B}\mathbf{A}}_0)^{-1}(\mathbf{B}\hat{f}_1) + \hat{q}\big); \qquad f_0 = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\hat{f}_0. \tag{3}$$

Šiuo atveju operatoriaus $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ išraiškos per žinomus operatorius neturime, todėl pagalbiniame poerdvyje $\langle \hat{\boldsymbol{F}}_0; +|\boldsymbol{C}\rangle$ yra tikslinga jį pakeisti kitu operatoriumi $\mathbf{K}_0$, tenkinančiu sąlygą $\mathbf{K}_0\hat{f}_0 = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\hat{f}_0$, kai $\hat{f}_0 \in \hat{\boldsymbol{F}}_0$. Žemiau pateiktame pavyzdyje parodysime, kaip tai yra daroma. Iš anksčiau pateiktų Koši uždavinių ir jų sprendinių išraiškų išplaukia sekanti teorema.

TEOREMA. *Egzistuoja vienintelis Koši uždavinio*

$$\begin{cases} \mathbf{A}f = \hat{f}, & f \in \boldsymbol{F},\ \hat{f} \in \mathbf{A}(\boldsymbol{F}); \\ \mathbf{T}f = \hat{q}, & \hat{q} \in \boldsymbol{Q} \end{cases} \tag{4}$$

sprendinys f nusakomas pareinamybe

$$f = \bar{f}_1 + f_0,$$

kai $\bar{f}_1$ ir f_0 nusakomi (3) išraiškomis, o $\hat{f}_1$ ir $\hat{f}_0$ – elemento $\hat{f}$ (1) *skaidiniu.*

Tokiu būdu (4) Koši uždavinį išskaidome į du Koši uždavinius, kas palengvina duoto Koši uždavinio sprendimą.

4°. *Pavyzdys.* Tegul duota diferencialinė lygtis:

$$yu_x - xu_y = \hat{f}. \tag{5}$$

Apibrėžę tiesinius operatorius $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$, $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\overline{\mathbf{X}}$, $\underline{\mathbf{X}}$, $\overline{\mathbf{Y}}$, $\underline{\mathbf{Y}}$ pereinamybėmis $\mathbf{D}_x x^m \overset{def}{=} mx^{m-1}$, $\mathbf{D}_y y^n \overset{def}{=} ny^{n-1}$, $\overline{\mathbf{X}}x^m \overset{def}{=} x^{m+1}$, $\overline{\mathbf{Y}}y^n \overset{def}{=} y^{n+1}$, $\mathbf{L}_x x^m \overset{def}{=} x^{m+1}/(m+1)$, $\mathbf{L}_y y^n \overset{def}{=} y^{n+1}/(n+1)$, $\underline{\mathbf{X}}1 \overset{def}{=} \underline{\mathbf{Y}}1 \overset{def}{=} 0$, $\underline{\mathbf{X}}x^{m+1} \overset{def}{=} x^m$, $\underline{\mathbf{Y}}y^{n+1} \overset{def}{=} y^n$, kai $n, m \in \mathbf{Z}_0$, diferencialinę lygtį galime užrašyti taip:

$$(\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_x - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{D}_y)u = \hat{f}.$$

Jos sprendinius u ieškosime formaliųjų eilučių tiesinėje erdvėje $\langle \boldsymbol{F}_{xy}; +|\boldsymbol{C}\rangle$, kai

$$\boldsymbol{F}_{xy} \overset{def}{=} \left\{ \sum_{k,l=0}^{+\infty} c_{kl}x^k y^l \,\middle|\, c_{kl} \in \boldsymbol{C} \right\}, \quad \text{t.y. } u \in \boldsymbol{F}_{xy}.$$

Pasinaudoję pažymėjimais $\mathbf{A}_0 \overset{def}{=} \overline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_x$, $\mathbf{A}_1 \overset{def}{=} \overline{\mathbf{X}}\mathbf{D}_y$, $\mathbf{A} \overset{def}{=} \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1$ ir pasirinkę $\mathbf{B} \overset{def}{=} \underline{\mathbf{Y}}$, bei atlikę įprastus operatorinius pertvarkymus, gauname:

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{D}_x - \overline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_x, \quad \mathbf{B}\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}_x, \quad \mathbf{B}\mathbf{A}_1 = \overline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_y;$$

$$\mathbf{K}_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathbf{L}_x\overline{\mathbf{X}})^k(\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_y)^k, \qquad (\widetilde{\mathbf{BA}})^{-1} = \mathbf{K}_1\mathbf{L}_x;$$

$$\mathbf{BA}(\boldsymbol{F}_{xy}) = \boldsymbol{F}_{xy}, \quad (\operatorname{Ker}\mathbf{BA})^{-1} = (\widetilde{\mathbf{BA}})^{-1}(\boldsymbol{F}_{xy}) = \overline{\mathbf{X}}(\boldsymbol{F}_{xy}),$$

$$\operatorname{Ker}\mathbf{BA}_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k y^k | c_k \in C \right\}.$$

Be to, teisinga pareinamybė:

$$\mathbf{AK}_1 = \overline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_x + (\overline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{Y}} - 1)\overline{\mathbf{X}}\mathbf{D}_y\mathbf{K}_1.$$

Iš gautų pareinamybių išplaukia, kad operatoriaus $\mathbf{A}$ pagrindinė pirmavaizdžių erdvė yra $\langle \overline{\mathbf{X}}(\boldsymbol{F}_{xy}); +|C\rangle$, o pagalbinė – $\langle \mathbf{K}_1\{\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k+1}y^{2k+1}|c_{2k+1} \in C\}; +|C\rangle$, nes $\operatorname{Ker}\mathbf{A} = \mathbf{K}_1\{\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}y^{2k}|c_{2k} \in C\}$. Tada pagrindinė atvaizdžių tiesinė erdvė $\langle \mathbf{A}(\overline{\mathbf{X}}(\boldsymbol{F}_{xy})); +|C\rangle$ tenkina sąryšį $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{X}}(\boldsymbol{F}_{xy})) \subset \overline{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{F}_{xy}) \hat{+} \overline{\mathbf{X}}^2(\boldsymbol{F}_{xy})$, o pagalbinė $\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{F}_0); +|C\rangle$ – sąryšį: $\mathbf{A}(\boldsymbol{F}_0) = \{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{2k+1}|c_k \in C\rangle$, nes

$$\begin{aligned}
\mathbf{AK}_1 y^{2l+1} &= (\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_x - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{D}_y)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathbf{L}_x\overline{\mathbf{X}})^k(\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_y)\right)y^{2l+1} = \\
&= (\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_x - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{D}_y)\left(y^{2l+1} + \frac{(2l+1)}{2}y^{2l}x^2 + \cdots + \frac{(2l+1)!!}{(2l)!!}yx^{2l}\right) = \\
&= -\frac{(2l+1)!!}{(2l)!!}x^{2l+1},
\end{aligned} \tag{6}$$

kai $l \in \mathbf{Z}_0$. Čia $0!! \overset{def}{=} 1$. Taigi, $\mathbf{A} : \overline{\mathbf{X}}(\boldsymbol{F}_{xy}) \leftrightarrow \mathbf{A}(\overline{\mathbf{X}}(\boldsymbol{F}_{xy})) : \mathbf{K}_1\mathbf{L}_x\underline{\mathbf{Y}}$, o operatorių $\mathbf{K}_0$, tenkinantį sąlygą $\mathbf{A} : \boldsymbol{F}_0 \leftrightarrow \mathbf{A}(\boldsymbol{F}_0) : \mathbf{K}_0$, sudarysime, pasinaudoję pareinamybėmis (6) ir $\mathbf{K}_0\mathbf{A} = 1$ pagalbinėje atvaizdžių tiesinėje erdvėje $\langle \hat{\boldsymbol{F}}_0; +|C\rangle$, t.y. $\mathbf{K}_0(\mathbf{AK}_1 y^{2l+1}) = \mathbf{K}_0(-\frac{(2l+1)!!}{(2l)!!}x^{2l+1})$, arba $\mathbf{K}_0 x^{2l+1} = -\frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}\mathbf{K}_1 y^{2l+1}$.

Tegul $\boldsymbol{Q} \overset{def}{=} \{\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}y^{2k}|c_{2k} \in C\}$ ir tiesiniai operatoriai $\mathbf{T}$ ir $\mathbf{R}$ tenkina sąlygas: $\mathbf{T}(\boldsymbol{F}_{xy}) = \boldsymbol{Q}$ bei $\mathbf{T} : \operatorname{Ker}\mathbf{A} \leftrightarrow \boldsymbol{Q} : \mathbf{R} = \mathbf{K}_1$, t.y.:

$$\mathbf{T}\left(\sum_{k,l \in \mathbf{Z}_0} c_{kl}x^k y^l\right) = \sum_{r=0}^{+\infty} c_{02r}y^{2r} \tag{7}$$

Tada Koši uždavinys

$$\begin{cases} \mathbf{A}u = \hat{f}, & u \in \boldsymbol{F}_{xy}, \quad \hat{f} \in \mathbf{A}(\boldsymbol{F}_{xy}); \\ \mathbf{T}u = \hat{q}, & \hat{q} \in \boldsymbol{Q}; \end{cases} \tag{8}$$

turės vienintelį sprendinį:

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} \left((\mathbf{L}_x\overline{\mathbf{X}})^k(\underline{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_y)^k\right)\left(\mathbf{L}_x\underline{\mathbf{Y}}\hat{f}_1 + \sum_{j=0}^{+\infty} c_{2j}y^{2j} - \sum_{j=0}^{+\infty} c_{2j+1}\frac{(2j)!!}{(2j+1)!!}y^{2j+1}\right), \tag{9}$$

kai $\hat{q} = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{2j}y^{2j}$, o $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_0$, $\hat{f}_1 \in \boldsymbol{F}_1$, $\hat{f}_0 \in \boldsymbol{F}_0$ ir, be to, $\hat{f}_0 = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{2j+1}y^{2j+1}$.

Šiuo atveju, pasinaudoję (7) sąryšiu, vaizdavimą operatoriumi $\mathbf{T}$ galime išreikšti sekančiai:

$$\mathbf{T}u(x,y) = \frac{u(0,y)+u(0,-y)}{2}.$$

Naudinga pastebėti, kad $\hat{f}_1 = \mathbf{A}\mathbf{K}_1\mathbf{L}_x\underline{\mathbf{Y}}\hat{f}_1$. Tada $\hat{f}_1 = \mathbf{A}\mathbf{K}_1\mathbf{L}_x\underline{\mathbf{Y}}\hat{f}$, kai $\hat{f} \in \mathbf{A}(\boldsymbol{F}_{xy})$, ir $\hat{f}_0 = \hat{f} - \hat{f}_1$.

Apibrėžę tiesinius poerdvius $\langle \boldsymbol{G}_r;\, +|\boldsymbol{C}\rangle$, kur

$$\boldsymbol{G}_r \stackrel{def}{=} \left\{ \sum_{k,l\in \boldsymbol{Z}_0,\ k+l=r} c_{kl}x^ky^l \,\middle|\, c_{kl} \in \boldsymbol{C} \right\}, \quad r \in \boldsymbol{Z}_0,$$

gauname, kad $\mathbf{A} : \boldsymbol{G}_{2r} \to \boldsymbol{G}_{2r}$, bet $\mathbf{A} : \boldsymbol{G}_{2r+1} \leftrightarrow \boldsymbol{G}_{2r+1} : \tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ ir, be to, $\boldsymbol{G}_r = (\hat{\boldsymbol{F}}_1 \cap \boldsymbol{G}_r) \hat{+} \{cx^r | c \in \boldsymbol{C}\}$.

5°. Pavyzdžiui, spręsdami diferencialinės lygties $\mathbf{A} = yu_x - xu_y$ Koši uždavinį,

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} - x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = xy^2 + x^3; \\ \dfrac{u(0,y)+u(0,-y)}{2} = y^2; \end{cases} \tag{10}$$

gauname: $\hat{f}_1 = \mathbf{A}\mathbf{K}_1\mathbf{L}_x\underline{\mathbf{Y}}(xy^2 + x^3) = xy^2 - 1/2x^3$, $\hat{f}_0 = 3/2x^3$, ir, pasinaudoję (9) išraiška, surandame sprendinį $u = u(x,y)$:

$$u = (x^2+y^2) - (x^2y + y^3).$$

Baigus spręsti (10) Koši uždavinį, gautą atsakymą tikslinga patikrinti, ar jis tenkina (10) lygčių sistemos pirmąją lygtį, nes priešingu atveju formali eilutė, esanti minėtos lygties dešinėje pusėje, nebūtų tiesinio poerdvio $\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{F}_{xy});\, +|\boldsymbol{C}\rangle$ elementu. Pastebėsime, kad Koši uždavinio (8) sprendinio $u = u(x,y)$ skaičiavimo algoritmą (9) galima efektyviai realizuoti kompiuteriu. Be to, parenkant kitokius pagalbinius operatorius $\mathbf{B}$, galima gauti ir kitas ieškomo sprendinio $u = u(x,y)$ operatorines išraiškas. Šiame darbe pateiktu metodu galima sukonstruoti Koši uždavinį ir jo sprendinį, įvairias parametrines išraiškas, pavyzdžiui, šioms diferencialinėms lygtims:

$$x^ky^l\frac{\partial^m u(x,y)}{\partial x^m} - ax^jy^r\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial y^n} = \hat{f}(x,y),$$

kai $a \in \boldsymbol{C}$, o $k, l, m, j, r, n \in \boldsymbol{N}$, imant pagalbiniais operatoriais operatorius $\underline{\mathbf{X}}^j$, $\underline{\mathbf{Y}}^l$ ir t.t.

LITERATŪRA

[1] Z. Navickas, *Formal solution of linear differential equations*, Proceedings of the Eight International Colloquium on Differential Equaations, Plovdiv, Bulgaria, 1997.

On the Cauchy Problem Generalization

Z. Navickas (KTU)

An algorithm presented in the paper is oriented for computer realization.