LMD mokslo darbai, 159–163
1998, Vilnius

Apibendrintų Kavagučio erdvių geometrija

E. Mazėtis (VPU)

Įvadas

Kaip žinoma, Euklido erdvėje kreivės lanko ilgio diferencialas išreiškiamas homogeniniu antrojo laipsnio polinomu, kurio argumentai yra taško koordinačių diferencialai. P. Finslerio apibendrinimo esmė yra ta, kad jis minėtą polinomą pakeitė bet kokia homogenine taško koordinačių funkcija. A. Kavaguti nagrinėjo atvejus, kai ši funkcija priklauso ir nuo aukštesnių eilių diferencialų. Tokių erdvių geometrija yra gana detaliai išnagrinėta (žr. apžvalginius straipsnius [1] ir [3]). H. Rundas darbe [2] pasiūlė apibrėžti Finslerio erdvės metriką nebūtinai homogeninės metrinės funkcijos pagalba, išdėstė tokių apibendrintų metrikų teorijos pagrindus. Šiame darbe apibrėžiama analogiškai apibendrinta metrika antrosios eilės Kavagučio erdvėje, konstruojama minėtos erdvės vidinių afininių siečių teorija, apibrėžiamos vidinės tenzorinės struktūros ir tiriami jų pilnojo integruojamumo kriterijai. Kadangi Kavagučio erdvė yra atskiras normalizuotų antrosios eilės liestinių sluoksniuočių T^2V_n atvejis, tai šiame darbe remiamasi erdvių T^2V_n geometrijos pagrindiniais faktais, išdėstytais autoriaus darbuose [4] ir [5].

1. Apibendrinta Kavagučio erdvė

Tegul K_n . n – matė diferencijuojama daugdara, T^2V_n – jos antrosios eilės liestinė sluoksniuotė. K_n-vadinsime apibendrinta Kavagučio erdve, jei jos bet kokios parametrizuotos kreivės $x^i = x^i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$, lanko ilgis skaičiuojamas metrinės funkcijos $F : T^2V_n \to R$ pagalba tokiu būdu

$$s = \int_{t^2}^{t^1} F(x^i, y^i, z^i)\, dt \tag{1}$$

čia $y^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, $z^i = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2x^i}{dt^2}$, o funkcija F tenkina šias sąlygas:

1. F yra diferencijuojama pagal visus $3n$ argumentus bent iki šeštos eilės.
2. F yra teigiama, t.y. $F(x^i,y^i,z^i) > 0$, jei $y^i \neq 0$, $z^i \neq 0$.
3. Kvadratinė forma $\dfrac{\partial^2 F^4}{\partial z^i \partial z^j}\xi^i\xi^j$ yra teigiamai apibrėžta bet kokiam erdvės K_n liečiamajam vektoriui $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$.

4. Funkcijos F^4 hesianas $\det\left\|\frac{\partial^2 F^4}{\partial z^i \partial z^j}\right\|$ yra erdvėje K_n nelygus nuliui.

Iš pateiktojo apibrėžimo galima daryti išvadą, kad Kavagučio erdvės K_n geometrija gali būti nagrinėjama kaip geometrija antrosios eilės liečiamųjų sluoksniuočių, normalizuotų metrinės funkcijos F pagalba.

Pažymėję $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_i^{'} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \partial_i^{''} = \frac{\partial}{\partial z^i}$, galime apibrėžti simetrinį tenzorių

$$g_{ij}=\frac{1}{4}\partial_i^{''}\partial_j^{''}F^4 = F^2\partial_i^{''}\partial_j^{''}F + 3F\partial_i^{''}F\partial_j^{''}F. \tag{2}$$

Sąlyga (4) reiškia, kad šio tenzoriaus determinantas $\det\|g_{ij}\|$ yra nenulinis, todėl egzistuoja atvirkštinis tenzorius g^{ik} toks, kad $g_{ij}\ g^{ik} = \delta^k_j$. Tenzorius g_{ij} yra vadinamas apibendrintos Kavagučio erdvės K_n metriniu tenzoriumi. Tokiu būdu erdvėje K_n apibrėžiama metrika ir ši erdvė tampa metrine erdve.

2. Erdvės K_n afininės sietys

Tegul $H^{*}{}_i^k$ yra tenzoriaus

$$H^i_j = g^{pi}y^q\partial_j^{''}g_{pq} \tag{3}$$

atvirkštinis tenzorius, tai dvejetas (Γ^i_j, M^i_j)

$$\Gamma^i_j = H^{*i}{}_p g^{kp} y^h \partial_j^{''} g_{kh},$$

$$M^i_j = z^k\partial_k^{'}\Gamma^i_j + \frac{1}{2}y^k\partial_k\Gamma^i_j + \frac{1}{2}\Gamma^i_k\Gamma^k_j$$

apibrėžia erdvės K_n diferencialinės geometrinės tiesinės sieties objektą. Jei $\omega^i, \Theta^i, \Psi^i$ – antrosios eilės liestinės sluoksniuotės invariantinės 1-formos (žr. [4]), tai šio objekto komponentės tenkina tokias diferencialines lygtis

$$d\Gamma^i_j - \Gamma^i_k\omega^k_j + \Gamma^k_j\omega^i_k - \Theta^i_j = \partial_k\Gamma^j_j\omega^k + \partial_k^{'}\Gamma^i_j\Theta^k + \partial_k^{''}\Gamma^i_j\Psi^k, \tag{5}$$

$$dM^i_j - M^i_k\omega^k_j + M^k_j\omega^i_k - \Gamma^k_j\Theta^i_k - \Psi^i_j = \partial_k M^i_j\omega^k + \partial_k^{'}M^i_j\Theta^k + \partial_k^{''}M^i_j\Psi^k.$$

Kaip įrodyta darbe [4], tiesinės sieties (Γ^i_j, M^i_j) komponenčių diferencialiniai tęsiniai visada indukuoja Kavagučio erdvės K_n dviejų afininių siečių objektus

$$\Gamma'^{k}_{ij} = \partial'_j \Gamma^k_i - \Gamma^h_j \partial''_h \Gamma^k_i, \tag{6}$$

$$\Gamma''^{k}_{ij} = \partial''_i M^k_j - \Gamma^h_j \partial''_i \Gamma^k_h.$$

Šios afininės sietys yra klasikinės Bervaldo afininės sieties Finslerio erdvėse analogai, jų komponentės tenkina tokias diferencialines lygtis

$$d\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{pj}\omega^p_i - \Gamma^k_{ip}\omega^p_j + \Gamma^p_{ij}\omega^k_p - \omega^k_{ij} = \partial_p \Gamma^k_{ij}\omega^p + \partial'_p \Gamma^k_{ij}\Theta^p + \partial''_p \Gamma^k_{ij}\Psi^p \tag{7}$$

Metrinio tipo afininę sietį $(\Pi^k_{ij}, C^k_{ij}, D^k_{ij})$ apibrėšime tokių 1-formų pagalba

$$\omega^{*i}_j = \omega^i_j + \Pi'^i_{jk}\omega^k + C^i_{jk}(\Theta^k + \Gamma^k_p \omega^p) + D^i_{jk}(\Psi^k + \Gamma^k_p \Theta^p + M^k_p \Psi^p), \tag{8}$$

reikalaudami, kad metrinio tenzoriaus g_{ij} kovariantinė išvestinė šios sieties atžvilgiu būtų lygi nuliui, o sieties koeficientai būtų simetriški.

Pažymėję

$$\partial^{\Gamma}_i = \partial_i - \Gamma^k_i \partial'_k - (M^k_i - \Gamma^k_p \Gamma^p_i)\partial''_k,$$

$$\partial'^{\Gamma}_i = \partial'_i - \Gamma^k_i \partial''_k,$$

gaumame tokias šios sieties komponenčių išraiškas

$$\Pi'^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ip}(\partial^{\Gamma}_k g_{jp} + \partial^{\Gamma}_j g_{kp} - \partial^{\Gamma}_p g_{jk}),$$

$$C^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ip}(\partial'^{\Gamma}_k g_{jp} + \partial'^{\Gamma}_j g_{kp} - \partial'^{\Gamma}_p{}' g_{jk}), \tag{9}$$

$$D^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ip} \partial''_j g_{kp}.$$

Dydžiai Π'^i_{jk} sudaro afininies sieties objektą, o C^i_{jk} ir D^i_{jk} yra tenzoriai. Sukonstruota afininė sietis $(\Pi'^i_{jk}, C^i_{jk}, D^i_{jk})$ yra Kartano afininės sieties Finslerio erdvėje analogas.

3. Tenzorinių laukų liftai

Jei $A,B,C, \ldots = 1,2,\ldots,3n$, $x^{n+i} = y^i$, $x^{2n+i} = z^i$, tai Kavagučio erdvės K_n tenzorinis laukas $T^A_B(x^A)$ lokaliose bazėse (dx^A, ∂_A) užsirašo taip

$$
\begin{aligned}
T = T_B^A \partial_A \otimes dx^B &= T_j^i \partial_i \otimes dx^j + T_{n+j}^i \partial_i \otimes dy^j + T_{2n+j}^i \partial_i \otimes dz^j \\
&+ T_j^{n+i} \partial_i^{'} \otimes dx^j + T_{n+j}^{n+i} \partial_i^{'} \otimes dy^j + T_{2n+j}^{n+i} \partial_i^{'} \otimes dz^j \\
&+ T_j^{2n+i} \partial_i^{''} \otimes dx^j + T_{n+j}^{2n+i} \partial_i^{''} \otimes dy^j + T_{2n+j}^{2n+i} \partial_i^{''} \otimes dz^j .
\end{aligned} \tag{10}
$$

Tokiu būdu tenzoriui T_B^A atitinka matrica

$$
T = \left\| T_B^A \right\| = \left\| \begin{matrix} T_j^i T_{n+j}^i T_{2n+j}^i \\ T_j^{n+i} T_{n+j}^{n+i} T_{2n+j}^{n+i} \\ T_j^{2n+i} T_{n+j}^{2n+i} T_{2n+j}^{2n+i} \end{matrix} \right\| \tag{11}
$$

Normalizuotose bazėse

$$
\{\partial_i^{\Gamma}, \partial_i^{'\Gamma}, \partial_i^{''}\} \text{ ir } \{dx^i, Dy^i = dy^i + \Gamma_k^i dx^k, Dz^i = dz^i + \Gamma_k^i dy^k + M_k^i dx^k\}
$$

šis tenzorius turi tokią išraišką

$$
\begin{aligned}
T = t_B^A \partial_A^{\Gamma} \otimes Dx^B &= t_j^i \partial_i^{\Gamma} \otimes dx^j + t_{n+j}^i \partial_i^{\Gamma} \otimes Dy^j + t_{2n+j}^i \partial_i^{\Gamma} \otimes Dz^j \\
&+ t_j^{n+i} \partial_i^{'\Gamma} \otimes dx^j + t_{n+j}^{n+i} \partial_i^{'\Gamma} \otimes Dy^j + t_{2n+j}^{n+i} \partial_i^{'\Gamma} \otimes Dz^j + t_j^{2n+i} \partial_i^{''} \otimes dx^j \\
&+ t_{n+j}^{2n+i} \partial_i^{''} \otimes Dy^j + t_{2n+j}^{2n+i} \partial_i^{''} \otimes Dz^j .
\end{aligned} \tag{12}
$$

kurioje koeficientai prie bazinių operatorių $t_j^i, t_{n+j}^i, \ldots, t_{2n+j}^{2n+i}$ yra tenzoriai. (10) ir (12) lygybėse sulyginę koeficientus prie tiesiškai nepriklausomų bazinių operatorių, gaumame lygybes, išreiškiančias abipus vienareikšmišką atitinkamybę, kuri bet kuriems devyniems tenzoriams $t_j^i, t_{n+j}^i, t_{2n+j}^i, t_j^{n+i}, t_{n+j}^{n+i}, t_{2n+j}^{n+i}, t_j^{2n+i}, t_{n+j}^{2n+i}, t_{2n+j}^{2n+i}$ priskiria tenzorių T_B^A. Ši atitinkamybė vadinama minėto devynių tenzorių rinkinio (Γ, M) liftu.

Pastebėkime, kad analogiškas liftų konstravimo būdas gali būti pritaikytas ir bet kokio valentingumo tenzoriams. Pvz., darbe [4] tokie liftai buvo sukonstruoti Kavagučio erdvės K_n metriniams tenzoriams g_{ij} ir g^{ij}.

4. Vidinės tenzorinės struktūros

Sakoma, kad apibendrintoje Kavagučio erdvėje K_n apibrėžta tenzorinė struktūra, jei duotas tenzorinis laukas T_B^A, tenkinantis sąlygas

$$
T_B^A T_C^B = \lambda \delta_C^A, \quad \lambda \in \{-1,0,1\} \tag{13}
$$

Jei $\lambda = -1$, tai tokia struktūra yra vadinama beveik kompleksine, jei $\lambda = 0$ – beveik dualiaja struktūra, o kai $\lambda = 1$ – beveik dviguba struktūra.

TEOREMA 1. *Apibendrintoje Kavagučio erdvėje K_n egzistuoja vidinės beveik dvigubų ir beveik dualiųjų tenzorinių struktūrų šeimos, kurių struktūriniai tenzoriai išsireiškia per erdvės K_n metrinio tenzoriaus komponentes.*

Jei $\Gamma = \left\| \Gamma_j^i \right\|, \overset{*}{M} = \left\| M_j^i - \Gamma_k^i \Gamma_j^k \right\|$, E - vienetinė matrica, tai matrica,

$$J_1 = \begin{Vmatrix} E & -2\Gamma & 2\Gamma^2 \\ 0 & -E & 2\Gamma \\ 0 & 0 & E \end{Vmatrix}$$

apibrėžia beveik dvigubos tenzorinės struktūros tenzorių, tuo tarpu beveik dualios struktūros struktūrinis tenzorius yra toks

$$J_2 = \begin{Vmatrix} \Gamma & -\Gamma^2 & \overset{*}{M}\Gamma \\ E & -\Gamma & 2\overset{*}{M} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

TEOREMA 2. *Tenzorių J_1 ir J_2 pagalba apibrėžtos tenzorinės struktūros yra pilnai integruojamos tada ir tik tada, kai afinioji sietis Γ'^i_{jk} yra simetriška, o tiesinės sieties kreivumo tenzoriai $R^i_{pq} = 2\overset{\Gamma}{\partial}_{[p}\Gamma^i_{q]}$ ir $K^i_{pq} = \overset{''}{\partial}_p \Gamma^i_q$ yra lygus nuliui.*

Išvada. *Jei apibendrintoje Kavagučio erdvėje K_n tenzorinės beveik dvigubos ir beveik dualios struktūros yra pilnai integruojamos, tai afiniosios sietys Γ'^i_{jk} ir Γ''^i_{jk} sutampa.*

LITERATŪRA

[1] C.I. Ispas *Finsler–Cartan–Kawaguchi Spaces, Proc. Nat. Semin. Finsler Spaces*, Brasov, Febr. 1980, Timisoara, 1981, 77 - 106.

[2] H. Rund *The Hamilton–Jacobi theory in the calculus of variatons*, London, N.Y.D.Van Nostrand, 1966.

[3] В.И. Близникас *Пространства Финслера и их обобщения, Алгебра, Топология, Геометрия*, Итоги науки ВИНИТИ АН СССР, Москва, 1969, 75-125.

[4] Э.Б. Мазетис *Некоторые вопросы геометрии кокасательного расслоенияя и касательного расслоения второго порядка, кандидатская диссертация*, Вильнюс, 1993.

[5] Э.Б. Мазетис О внутренних тензорных структурах касательного расслоения второго порядка, *Liet. Matem. Rink.*, 36, Nr.4, 1996, 512-523.

Zur Geometrie allgemeinen Kawaguchischen Räumen

E. Mazėtis

In dieser Arbeit deffiniert man die allgemeine Metrik in Kawaguchischen Räumen zweiter Ordnung und konstruiert man Theorie seinen affinen Zusammenhängen. Beweisst, dass in dieser Räumen innere Tensorstrukturen existiert, und Forderungen für ihre Integralität festgestellt.