

**Внутренние оснащения полунеголономных гиперкомплексов
SNGr(1,n,2n-3) проективного пространства P_n**

К.В. Навицкис (ВУ)

Полунеголономным гиперкомплексом $ГК \equiv SNGr(1,n,2n-3)$ n -мерного проективного пространства P_n называется распределение $(n-2)$ -плоскостей Π_{n-2} на грассмановом многообразии прямых $Gr(1,n)$, каждая $(n-2)$ -плоскость Π_{n-2} которого проходит через соответствующую прямую l . Пусть канонизация репера $\{A_i\}$ ($i,j=1,...,n+1$) проведена так, что

$$l = (A_1, A_2), \quad \Pi_{n-2} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n+1}).$$

Тогда дифференциальные уравнения распределения ГК имеют следующий вид:

$$\omega_a^\alpha = \lambda_{a\beta}^{\alpha p} \omega_p^\beta + \lambda_{ab}^{\alpha p} \omega_p^b, \tag{1}$$

где

$$\nabla \lambda_{a\beta}^{\alpha p} - \lambda_{ab}^{\alpha p} \omega_\beta^b - \delta_\beta^\alpha \omega_a^p = \lambda_{a\beta A}^{\alpha pq} \omega_q^A, \tag{2}$$

$$\nabla \lambda_{ab}^{\alpha p} = \lambda_{ab A}^{\alpha pq} \omega_q^A; \tag{3}$$

здесь $\alpha, \beta, \dots = 3, 4$; $a, b, \dots = 5, \dots, n+1$; $A, B, \dots = 3, \dots, n+1$.

Дифференциально-геометрический объект $H^{(1)}(ГК) = \{\lambda_{aA}^{\alpha p}\}$ алгебраически подобен дифференциально-геометрическому объекту

$$\{b_{a\alpha\beta\gamma}, b_{a\alpha}, b_{ab\alpha\beta}, b_{ab}, c_{a\alpha}\}$$

Полунеголономный гиперкомплекс назовём оснащённым (или норманизованным), если к каждой прямой l этого гиперкомплекса присоединены два подпространства Π_I и Π_{II} пространства P_n , обладающие следующими свойствами: 1) трёхмерная плоскость Π_I проходит через прямую l , но не имеет с $(n-2)$ плоскостью других общих точек; 2) $(n-4)$ -плоскость Π_{II} лежит в $(n-2)$ -плоскости Π_{n-2} , но не проходит через прямую l ; 3) подпространства Π_I и Π_{II} инвариантны относительно проективных преобразований, принадлежащих подгруппе стационарности прямой l .

Подпространства Π_I и Π_{II} определяются следующими уравнениями

$$\Pi_I: x^a = \lambda_a^\alpha x^\alpha, \tag{4}$$

$$\Pi_{II}: x^p = \lambda_p^\alpha x^\alpha, x^\alpha = 0. \tag{5}$$

Их будем называть нормальными пространствами первого и второго рода соответственно.

Гиперкомплекс ГК является оснащённым тогда и только тогда, когда на нём заданы следующие поля дифференциально-геометрических объектов

$$\nabla \lambda_{\alpha}^a + \omega_{\alpha}^a = \lambda_{\alpha A}^{aP} \omega_P^A, \quad (6)$$

$$\nabla \lambda_{\alpha}^p + \omega_{\alpha}^p = \lambda_{\alpha A}^{pq} \omega_q^A, \quad (7)$$

Характеристика $(n-2)$ -плоскости Π_{n-2} при движении прямой l вдоль линейчатой поверхности

$$L: \omega_p^{\alpha} = e_p^{\alpha} \Theta, \omega_p^a = \lambda_{\alpha}^a \omega_p^{\alpha} (D\Theta = 0) \quad (8)$$

определяется уравнениями

$$x^{\alpha} = 0, \left[\delta_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + \left(\lambda_{a\beta}^{\alpha p} + \lambda_{\beta}^b \lambda_{ab}^{\alpha p} \right) x^a \right] l_p^{\beta} = 0.$$

Если точка

$$a_p x^p = 0, \quad x^A = 0 \quad (9)$$

и $(n-3)$ -коплоскость

$$u_p = 0, \quad T^A u_A = 0 \quad (10)$$

неподвижны, то уравнения рассматриваемой характеристики принимают вид

$$\begin{cases} x^{\alpha} = 0, \\ \left[\delta_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + \left(\lambda_{a\beta}^{\alpha p} + \lambda_{\beta}^b \lambda_{ab}^{\alpha p} \right) x^a \right] a_p T^{\beta} = 0. \end{cases}$$

Полученная система допускает нетривиальные решения для величин T^{α} только тогда, когда

$$\begin{cases} x^{\alpha} = 0, \\ \det \left\| \left[\delta_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + \left(\lambda_{a\beta}^{\alpha p} + \lambda_{\beta}^b \lambda_{ab}^{\alpha p} \right) x^a \right] a_p \right\| = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Эти уравнения определяют однопараметрическое семейство $(n-3)$ -мерных поверхностей. Введем обозначение

$$\rho_a^p = -\frac{1}{2} \left(\lambda_{a\alpha}^{\alpha p} + \lambda_{\alpha}^b \lambda_{ab}^{\alpha p} \right) \quad (12)$$

Линейная поляра прямой l относительно алгебраического многообразия (11) определяется уравнениями

$$a_p (x^p - \rho_a^p x^a) = 0, \quad x^\alpha = 0. \quad (13)$$

$(n-3)$ -плоскость не зависит от выбора точки (9) тогда и только тогда, когда

$$x^p = \rho_a^p x^a, \quad x^\alpha = 0. \quad (14)$$

Велечины ρ_a^p удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (7). Следовательно, уравнения (12) устанавливают соответствие между нормальными пространствами Π_I и Π_{II} . Это соответствие мы будем называть проективитетом Бомпьяни–Пантази.

Допустим, что определитель $\det \|\lambda_{ab}^{\alpha\beta}\|$ отличен от нуля.

В таком случае дифференциальные уравнения (1) можно разрешить относительно форм ω_p^a :

$$\omega_p^a = \mu_{p\alpha}^{aq} \omega_q^\alpha + \mu_{p\alpha}^{ab} \omega_b^\alpha. \quad (15)$$

Дифференциальными уравнениями (15) определяется распределение прямых на грасмановом многообразии $\text{Gr}(n-2, n)$ $(n-2)$ -плоскостей пространства P_n , каждой из которых отнесена соответствующая $(n-2)$ -плоскость, т.е. полунеголомный гиперкомплекс $\text{ГК}^* \equiv \text{SNGr}(n-2, n, 2n-3)$. Дифференциально-геометрический объект $H^{(1)}(\text{ГК}^*) \{ \mu_{p\alpha}^{aq}, \mu_{p\alpha}^{ab} \}$ алгебраически подобен объекту

$$\{ K^{a\alpha\beta\gamma}, K^{a\alpha}, C^{a\alpha}, K^{ab\alpha\beta}, K^{ab} \}$$

Компоненты объектов $H^{(1)}(\text{ГК})$ и $H^{(1)}(\text{ГК}^*)$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_{a\beta}^{\alpha p} + \lambda_{ab}^{\alpha q} \mu_{q\beta}^{bp} &= 0, \lambda_{ac}^{\alpha p} \mu_{p\beta}^{cb} = \delta_\beta^\alpha \delta_b^a, \\ \mu_{p\alpha}^{aq} + \mu_{p\beta}^{ab} \lambda_{ba}^{\beta q} &= 0, \mu_{p\alpha}^{ac} \lambda_{cb}^{\alpha q} = \delta_p^q \delta_b^a. \end{aligned}$$

Соответствие Бомпьяни–Пантази для гиперкомплекса ГК^* имеет вид

$$\rho_\alpha^a = \frac{1}{2} (\mu_{p\alpha}^{\alpha p} - \lambda_b^p \mu_{p\alpha}^{ab}) \quad (16)$$

Пусть параметры нормальных пространств λ_α^a и λ_α^p удовлетворяют соотношениям (12) и (16). Тогда они являются решениями следующей системы уравнений:

$$F_{\alpha b}^{\beta a} \lambda_b^\beta = F_\alpha^a, \quad V_{qa}^{pb} \lambda_b^q = V_a^p,$$

где

$$F_{ab}^{\beta a} = 4\delta_a^\beta \delta_b^a - \lambda_{cb}^{\beta p} \mu_{pa}^{ac},$$

$$V_{qa}^{pa} = 4\delta_q^p \delta_a^b + \lambda_{ac}^{\alpha p} \mu_{qa}^{cb},$$

$$F_\alpha^a = \frac{1}{2} \left(4\mu_{pa}^{\alpha p} + \lambda_{b\beta}^{\beta p} \mu_{pa}^{ab} \right),$$

$$V_a^p = - \left(2\lambda_{aa}^{\alpha p} + \lambda_{ab}^{\alpha p} \mu_{qa}^{bq} \right)$$

Полунеголономный гиперкомплекс ГК будем называть оснащённым в смысле Э. Картана, если каждой прямой этого гиперкомплекса отнесена прямая

$$C(l): x^p = m_\alpha^p x^\alpha, x^\alpha = m_\alpha^a x^a,$$

не пересекающая $(n-2)$ -плоскость Π_{n-2} и инвариантная относительно проективных преобразований стационарной подгруппы прямой l . Поле прямых $C(l)$ на гиперкомплексе ГК определяется полем объекта $\{m_\alpha^p, m_\alpha^p\}$:

$$\nabla m_\alpha^p + m_\alpha^a \omega_a^p + \omega_\alpha^p = m_{\alpha a}^{pq} \omega_a^q,$$

$$\nabla m_{\alpha m}^a + \omega_\alpha^a = m_{\alpha a}^{ap} \omega_p^a,$$

Характеристика 3-плоскости (4), когда прямая l описывает линейчатую поверхность

$$\omega_p^\alpha = 0, \omega_p^\alpha = a_p T^a \theta (D\theta = 0)$$

определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^a = \lambda_\alpha^a x^\alpha, \\ \left[\delta_b^a x^p + \left(\lambda_{ab}^{\alpha p} - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^c \lambda_{cb}^{\beta p} \right) x^a \right] T^b a_p = 0 \end{cases}$$

эта система допускает нетривиальные решения для величин T^a только тогда, когда

$$\begin{cases} x^a = \lambda_\alpha^a x^\alpha, \\ \left\| \left[\delta_b^a x^p + \left(\lambda_{ab}^{\alpha p} - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^c \lambda_{cb}^{\beta p} \right) x^a \right] a_p \right\| = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Линейная поляра прямой l относительно алгебраического многообразия (17) определяется уравнениями

$$x^\alpha = \lambda_\alpha^a x^a, a_p (x^p - \lambda_\alpha^p x^\alpha) = 0,$$

где

$$\lambda_\alpha^p = -\frac{1}{n-3} \left(\lambda_{aa}^{\alpha p} - \lambda_\alpha^a \lambda_\beta^b \lambda_{ab}^{\beta p} \right)$$

Осью полученного пучка плоскостей является прямая

$$x^p = \lambda_\alpha^p x^\alpha, \quad x^\alpha = \lambda_\alpha^a x^a, \quad (18)$$

определяющая оснащение Э. Картана гиперкомплекса ГК, поскольку

$$\nabla \lambda_\alpha^p + \lambda_{\alpha\beta}^\alpha \omega_\alpha^p + \omega_\alpha^p = \lambda_{\alpha A}^{pq} \omega_q^A,$$

Гиперкомплекс ГК будем называть оснащённым в смысле Э.Бортолотти, если к каждой прямой $l \in \text{ГК}$ присоединена $(n-2)$ -плоскость

$$B_{n-2}(l): x^p = K_\alpha^p x^\alpha + K_a^p x^a,$$

не имеющая общих точек с прямой l и инвариантная относительно проективных преобразований стационарной подгруппы прямой l .

Поле $(n-2)$ -плоскостей $B_{n-2}(l)$ определяется полем объекта $\{K_\alpha^p, K_a^p\}$:

$$\nabla K_\alpha^p - K_a^p \omega_\alpha^a + \omega_\alpha^p = K_{\alpha A}^{pq} \omega_q^A,$$

$$\nabla K_\alpha^p + \omega_\alpha^p = K_{\alpha A}^{pq} \omega_q^A,$$

Через 3-плоскость (4) и прямую (18) можно провести инвариантную $(n-2)$ -плоскость, уравнения которой имеют вид $x^p = \tilde{G}_\alpha^p x^\alpha + \lambda_\alpha^p x^a$, где $\tilde{G}_\alpha^p = \lambda_\alpha^p - \lambda_\alpha^a \lambda_a^p$, причём $\nabla \tilde{G}_\alpha^p - \lambda_\alpha^p \omega_\alpha^a + \omega_\alpha^p = \tilde{G}_{\alpha A}^{pq} \omega_q^A$.

Полученная $(n-2)$ -плоскость определяет оснащение в смысле Э. Бортолотти гиперкомплекса ГК.

Оснащение в смысле Э.Картана индуцирует проективную связность на гиперкомплексе, которая определяется формами

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_p^q &= \omega_p^q - m_\alpha^q \omega_p^\alpha, \quad \tilde{\omega}_p^a = \omega_p^q - m_\alpha^a \omega_p^\alpha, \\ \tilde{\omega}_a^p &= m_a^p - \lambda_{aA}^{\alpha q} m_\alpha^p \omega_q^A, \quad \tilde{\omega}_a^b = \omega_a^b - \lambda_{aA}^{\alpha p} m_\alpha^b \omega_p^A. \end{aligned}$$

Intrinsic normalizations of semi-non-holonomic hypercomplexes $\text{SNGr}(1, n, 2n-3)$ in the projective space P_n

K.V. Navickis

In this paper the problem of intrinsic normalizations of a semi-non-holonomic hypercomplexes $\text{SNGr}(1, n, 2n-3)$ in n -dimensional projective space P_n is considered. It is proved that there exists three kinds of the intrinsic normalizations of $\text{SNGr}(1, n, 2n-3)$. So called intrinsic normal spaces of the first and the second kind, some correspondences between the normal spaces are obtained. The geometrical interpretations of all these objects and correspondences are given.