LMD mokslo darbai, 169–173
1998, Vilnius

О внутренних оснащениях полунеголономных гиперкомплексов SNGr (1,n,2n-3) аффинного пространства

Я.З. Стайшене (ВПУ)

Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесённое к подвижному реперу $\{A, e_i\}$, дифференциальные уравнения инфинитизимального смещения которого имеют вид $(i,j = 1,\dots,n)$:

$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j.$$

Множество всех прямых пространства A_n образует $2(n-1)$-мерное многообразие Грассмана $Gr(1,n)$. Полунеголономным гиперкомплексом $SNGr(1,n,2n-3)$ пространства A_n называется распределение $(n-2)$-плоскостей Π_{n-2} на грассмановом многообразии $Gr(1,n)$, каждая $(n-2)$-плоскость которого проходит через соответствующую прямую l [1]. Пусть репер выбран так, что $l = (A, e_i)$, $\Pi_{n-2} = (A, e_1, e_4, \dots, e_n)$. В репере нулевого порядка гиперкомплекс $SNGr(1,n,2n-3)$ определяется дифференциальными уравнениями $(A,B=2,3,\dots,n;\ a,b=4,\dots,n;\ \alpha,\beta=2,3,)$

$$\omega_a^{\alpha} = \lambda^{\alpha}_{a\beta}\omega^{\beta} + \lambda^{*}_{a\beta}\omega_1^{\beta} + \lambda^{\alpha}_{ab}\omega^{b} + \lambda^{*\alpha}_{ab}\omega_1^{b}, \tag{1}$$

где

$$\nabla\lambda^{\alpha}_{a\beta} - \lambda^{\alpha}_{ab}\omega^{b}_{\beta} = \lambda^{\alpha}_{a\beta A}\omega^{A} + \lambda^{*\alpha}_{a\beta A}\omega_1^{A}$$

$$\nabla\lambda^{\alpha}_{ab} = \lambda^{\alpha}_{abA}\omega^{A} + \lambda^{*\alpha}_{abA}\omega_1^{A},$$

$$\nabla\lambda^{*\alpha}_{a\beta} + \lambda^{*\alpha}_{a\beta}\omega_1^{\,1} + \lambda^{\alpha}_{ab}\omega^{1} - \lambda^{*\alpha}_{ab}\omega^{b}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{1}_{a} = \lambda^{*\alpha}_{a\beta A}\omega^{A} + \lambda^{**\alpha}_{a\beta A}\omega_1^{A},$$

$$\nabla\lambda^{*\alpha}_{ab} + \lambda^{*\alpha}_{ab}\omega_1^{\,1} + \lambda^{\alpha}_{ab}\omega^{1} = \lambda^{*\alpha}_{abA}\omega^{A} + \lambda^{**\alpha}_{abA}\omega_1^{A}.$$

Полунеголономный гиперкомплекс $SNGr(1,n,2n-3)$ называется оснащённым (или нормализованным) если к каждой прямой l этого гиперкомплекса присоединены два инвариантных подпространства

$$N_3(l)\colon x^a = L^a_{\alpha}\omega^{\alpha} \text{ и } N_{n-4}(l)\colon x^1 = L_a\omega^a,\ M_a x^a = 1,\ x^{\alpha} = 0$$

пространства A_n называемые нормальными пространствами первого и второго рода соответствено. Поля дифференциально-геометрических объектов $\{L^a_{\alpha}\}$ и $\{L_a, M_a\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla L_{\alpha}^{a} + \omega_{\alpha}^{a} = L^{a}_{\alpha A}\omega^{A} + L^{*a}_{\alpha A}\omega_1^{A},$$

$$\nabla L_a + L_a\omega_1^{\,1} + M_a\omega^{1} + \omega_a^{\,1} = L_{aA}\omega^{A} + L^{*}_{aA}\omega_1^{A},$$

$$\nabla M_a = M_{aA}\omega^A + M^*_{aA}\omega^A_1.$$

Отсюда , в частности следует, что

$$\nabla L^a_{\alpha\beta} - L^a_{\alpha b}\omega_\beta^b + \lambda^\gamma_{b\beta}L^b_\alpha\omega^a_\gamma + \lambda^\gamma_{b\beta}L^a_\gamma\omega^b_\alpha = L^a_{\alpha\beta A}\omega^A + L^{*a}_{\alpha\beta A}\omega^A_1,$$

$$\nabla L^a_{\alpha b} + \lambda^\beta_{cb}L^c_\alpha\omega^a_\beta + \lambda^\beta_{cb}L^a_\beta\omega^c_\alpha = L^a_{\alpha bA}\omega^A + L^{*a}_{\alpha bA}\omega^A_1,$$

$$\nabla L^{*a}_{\alpha\beta} + L^{*a}_{\alpha\beta}\omega_1{}^1 + L^a_{\alpha\beta}\omega^1 + L^a_\beta\omega^1_\alpha - L^{*a}_{\alpha b}\omega^b_\beta + \lambda^{*\gamma}_{b\beta}L^b_\alpha\omega^a_\gamma + \lambda^{*\gamma}_{b\beta}L^a_\gamma\omega^b_\alpha$$

$$= L^{*a}_{\alpha\beta A}\omega^A + L^{**a}_{\alpha\beta A}\omega^A_1,$$

$$\nabla\lambda^{*a}_{\alpha b} + L^{*a}_{\alpha b}\omega_1{}^1 + L^a_{\alpha b}\omega^1 + \delta^a_b L^c_\alpha\omega^1_c + \lambda^{*\beta}_{cb}L^c_\alpha\omega^a_\beta + \lambda^{*\beta}_{cb}L^a_\beta\omega^c_\alpha - \delta^a_b\omega^1_\alpha$$

$$= \lambda^{*a}_{\alpha bA}\omega^A + \lambda^{**a}_{\alpha bA}\omega^A_1.$$

Гиперкомплекс SNGr(1,n,2n-3) будем называть оснащённым в смысле Э. Картана, если к каждой прямой l этого гиперкомплекса отнесена прямая C(l): $m_\alpha x^\alpha = 1$, $n_\alpha x^\alpha = x^1$, $x^a = m^a_\alpha x^\alpha$, не пересекающая ($n$–2)-плоскость Π_{n-2} и инвариантная относительно аффинных преобразований стационарной подгруппы прямой l. Поле прямых C(l) определяется полем дифференциально-геометрического объекта $\{m_\alpha, n_\alpha, m^a_\alpha\}$:

$$\nabla m_\alpha = m_{\alpha A}\omega^A + m^*_{\alpha A}\omega_1{}^A,$$

$$\nabla n_\alpha + n_\alpha\omega_1{}^1 + m_\alpha\omega^1 + m^a_\alpha\omega_a{}^1 + \omega^1{}_\alpha = n_{\alpha A}\omega^A + n^*_{\alpha A}\omega_1{}^A,$$

$$\nabla m^a_\alpha + \omega^a_\alpha = m^a_{\alpha A}\omega^A + m^{*a}_{\alpha A}\omega_1{}^A.$$

Рассмотрим линейчатую поверхность

$$L: \omega^\alpha = 0,\ \omega_1{}^\alpha = 0,\ \omega^a = l^a\theta,\ \omega_1{}^a = l_1{}^a\theta,\ (D\theta = 0)$$

пространства A_n. Характеристика трёхмерной плоскости N_3(l), когда прямая l описывает линейчатую поверхность L , определяется уравнениями

$$x^a = L^a_\alpha x^\alpha,$$

$$[\delta^a_b + (L^a_{\alpha b} - \lambda^\beta_{cb}L^a_\beta L^c_\alpha)x^\alpha]\, l^b + [\delta^a_b\omega^1 + (L^{*a}_{\alpha b} - \lambda^{*\beta}_{cb}L^a_\beta L^c_\alpha)x^\alpha]\, l^b_1 = 0$$

Положим

$$M_\alpha = -1/n\text{-}3(L^a_{\alpha a} - \lambda^\beta_{ab}L^b_\beta L^a_\alpha),$$

$$N_\alpha = -1/n\text{-}3(L^{*a}_{\alpha a} - \lambda^{*\beta}_{ab}L^b_\beta L^a_\alpha).$$

Тогда

$$\nabla M_\alpha = M_{\alpha A}\omega^A + M^*_{\alpha A}\omega^A_1,$$

$$\nabla N_\alpha + N_\alpha\omega^1{}_1 + M_\alpha\omega^1 + L^a_\alpha\omega^1{}_a + \omega^1{}_a = N_{\alpha A}\omega^A + N^*_{\alpha A}\omega^A_1.$$

Объект $\{M_\alpha, N_\alpha, L^a{}_\alpha\}$ определяет инвариантную прямую C(l).

Рассмотрим такие полунеголономные гиперкомплексы, дифференциальные уравнения которых разрешимы относительно форм ω^a и $\omega_1{}^a$:

$$\omega^a = \mu^a{}_\alpha\omega^\alpha + \mu^{*a}{}_\alpha\omega^\alpha{}_1 + \mu^{ab}{}_\alpha\omega^\alpha{}_b,$$

$$\omega_1{}^a = \nu^a{}_\alpha\omega^\alpha + \nu^{*a}{}_\alpha\omega^\alpha{}_1 + \nu^{ab}{}_\alpha\omega^\alpha{}_b.$$

Эти уравнения определяют полунеголономный гиперкомплекс SNGr(n–2,n,2n–3), т.е. распределение прямых на грассмановом многообразии Gr(n–2, n), каждой из которых сопоставлена соответствующая (n–2)-плоскость.

Между компонентами объектов

$$H^{(1)}(\mathrm{SNGr}(1,n,2n\text{-}3)) = \{\lambda^\alpha{}_{aA}, \lambda^{*\alpha}{}_{aA}\} \text{ и}$$

$$H^{(1)}(\mathrm{SNGr}(n\text{-}2,n,2n\text{-}3)) = \{\mu^a{}_\alpha, \mu^{*a}{}_\alpha, \mu^{ab}{}_\alpha, \nu^a{}_\alpha, \nu^{*a}{}_\alpha, \nu^{ab}{}_\alpha\}$$

имеют место следующие соотношения:

$$\lambda^\alpha{}_{a\beta} + \lambda^\alpha{}_{ab}\mu^b{}_\beta + \lambda^{*\alpha}{}_{ab}\nu^b{}_\beta = 0, \qquad \mu^{ac}{}_\alpha\lambda^\alpha{}_{cb} = \delta^a{}_b,$$

$$\lambda^{*\alpha}{}_{a\beta} + \lambda^\alpha{}_{ab}\mu^{*b}{}_\beta + \lambda^{*\alpha}{}_{ab}\nu^{*b}{}_\beta = 0, \quad \mu^{ac}{}_\alpha\lambda^\alpha{}_{cb} = 0,$$

$$\lambda^\alpha{}_{ac}\mu^{cb}{}_\beta + \lambda^{*\alpha}{}_{ac}\nu^{cb}{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta\delta^b{}_a, \qquad \nu^{ac}{}_\alpha\lambda^\alpha{}_{cb} = 0,$$

$$\mu^a{}_\alpha + \mu^{ab}{}_\beta\lambda^\beta{}_{b\alpha} = 0, \qquad \mu^{*a}{}_\alpha + \mu^{ab}{}_\beta\lambda^{*\beta}{}_{b\alpha} = 0,$$

$$\nu^a{}_\alpha + \nu^{ab}{}_\beta\lambda^\beta{}_{b\alpha} = 0, \qquad \nu^{*a}{}_\alpha + \nu^{ab}{}_\beta\lambda^{*\beta}{}_{b\alpha} = 0.$$

$$\nu^{ac}{}_\alpha\lambda^{*\alpha}{}_{cb} = \delta^a{}_b.$$

Характеристика (n–2)-плоскости Π_{n-2} при движении прямой l вдоль линейчатой поверхности

$$L_1: \begin{array}{l} \omega^\alpha = l^\alpha\theta, \quad \omega^a = L^a{}_\alpha\omega^\alpha, \\ \omega^\alpha{}_1 = l^\alpha{}_1\theta, \quad \omega^a{}_1 = L^a{}_\alpha\omega^\alpha{}_1, \ (D\theta = 0) \end{array}$$

определяется уравнениями

$$x^\alpha = 0, \ [\delta^\alpha{}_\beta + (\lambda^\alpha{}_{a\beta} + \lambda^\alpha{}_{ab}L^b{}_\beta)x^a]l^\beta + [\delta^\alpha{}_\beta\omega^1 + (\lambda^{*\alpha}{}_{a\beta} + \lambda^{*\alpha}{}_{ab}L^b{}_\beta)x^a]l^\beta{}_1 = 0.$$

Положим

$$\rho_a = -1/2(\lambda^\alpha{}_{a\alpha} + \lambda^\alpha{}_{ab}L^b{}_\alpha), \tag{2}$$

$$\rho^*{}_a = -1/2(\lambda^{*\alpha}{}_{a\alpha} + \lambda^{*\alpha}{}_{ab}L^b{}_\alpha). \tag{3}$$

Объект $\{\rho_a, \rho^*{}_a\}$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla\rho_a = \rho_{aA}\omega^A + \rho^{\sim}_{aA}\omega^A{}_1,$$

$$\nabla\rho^*_a + \rho^*_a\omega^1{}_1 + \rho_a\omega^1 + \omega^1{}_a = \rho^*_{aA}\omega^A + \rho'_{aA}\omega^A{}_1.$$

Соотношения (2) и (3) устанавливают соответствие между нормальными пространствами $N_3(l)$ и $N_{n-4}(l)$:

$$\rho_a x^a = 1,\ \ x^1 = \rho^*_a x^a,\ x^\alpha = 0.$$

Рассмотрим гиперплоскость

$$C_1x^1 + C_Ax^A + C = 0, \tag{4}$$

которая проходит через прямую l тогда и только тогда, когда $C_1 = 0$, $C = 0$. Пусть (n–2)-плоскость Π_{n-2} описывает однопараметрическое семейство (n–2)-плоскостей

$$\omega^\alpha = t^\alpha\theta, \quad \omega^\alpha{}_1 = t^\alpha{}_1\theta, \tag{5}$$

$$\omega^\alpha{}_a = -(L_at^\alpha{}_1 + M_at^\alpha)\theta \quad (D\theta = 0).$$

Дифференцируя соотношения $C_1 = 0$ и $C = 0$ вдоль однопараметрического семейства (5), получаем уравнения

$$p_\alpha t^\alpha + p^*_\alpha t^\alpha{}_1 = 0,\quad q_\alpha t^\alpha + q^*_\alpha t^\alpha{}_1 = 0,$$

где

$$p_\alpha = C_\alpha + C_a(\mu^a{}_\alpha - \mu^{ab}{}_\alpha M_b),\ \ p^*_\alpha = C_a(\mu^{*a}{}_\alpha - \mu^{ab}{}_\alpha L_b)$$

$$q_\alpha = C_a(\nu^a{}_\alpha - \nu^{ab}{}_\alpha M_b), \qquad q^*_\alpha = C_\alpha + C_a(\nu^{*a}{}_\alpha - \nu^{ab}{}_\alpha L_b).$$

Система величин $T_\alpha = p_\alpha + q^*_\alpha$ образует тензор. Положим $T_\alpha = 0$.

В таком случае уравнение гиперплоскости (4) принимает вид

$$C_a(x^\alpha - \rho^a{}_\alpha x^\alpha) = 0,$$

где

$$\rho^a{}_\alpha = 1/2(\mu^a{}_\alpha + \nu^{*a}{}_\alpha - \mu^{ab}{}_\alpha M_b - \nu^{ab}{}_\alpha L_b). \tag{6}$$

Осью полученного пучка гиперплоскостей является 3-плоскость $N_3(l)$: $x^a = \rho^a{}_\alpha x^\alpha$, причем $\nabla\rho^a{}_\alpha + \omega^a{}_\alpha = \rho^a{}_{\alpha A}\omega^A + \rho^*_{\alpha A}\omega^A{}_1$.

Уравнения (6) определяют соответствие между нормальными пространствами. Исключая параметры M_a и L_a из уравнений (2), (3) и (6), получаем систему уравнений

$$S^{\beta a}{}_{\alpha b}L^b{}_\beta = S^a{}_\alpha,$$

где

$$S^{\beta a}{}_{\alpha b} = 2\delta^\beta{}_\alpha\delta^a{}_b - 1/2\ (\mu^{ac}{}_\alpha\lambda^\beta{}_{cb} + \nu^{ac}{}_\alpha\lambda^{*\beta}{}_{cb}),$$

$$S^a{}_\alpha = \mu^a{}_\alpha + \nu^{*a}{}_\alpha + 1/2\ (\mu^{ab}{}_\alpha\lambda^\beta{}_{b\beta} + \nu^{ab}{}_\alpha\lambda^{*\beta}{}_{b\beta}),$$

$$\nabla S^{\beta a}{}_{\alpha b} = S^{\beta a}{}_{\alpha bA}\omega^A + S^{*\beta a}{}_{\alpha bA}\omega^A{}_1.$$

Предполагая существование тензора $S^{*\beta a}{}_{\alpha b}$, для которого

$$S^{\gamma a}{}_{\alpha c}S^{*\beta c}{}_{\gamma b} = \delta^a{}_b\delta^\beta{}_\alpha, \quad S^{*\gamma a}{}_{\alpha c}S^{\beta c}{}_{\gamma b} = \delta^a{}_b\delta^\beta{}_\alpha,$$

получаем внутреннее инвариантное пространство

$$N_3(l) : L^A{}_\alpha = S^{*\beta a}{}_{\alpha b}s^b{}_\beta.$$

Исключая параметры $L^a{}_\alpha$ из уравнений (2), (3) и (6), получаем систему уравнений

$$P^b{}_aM_b + P^{*b}{}_aL_b = P_a,$$

$$Q^b{}_aM_b + Q^{*b}{}_aL_b = Q_a,$$

определяющую внутреннее инвариантное оснащение, где

$$P_a{}^b = 4\delta^b{}_a + \lambda^\alpha{}_{ac}\mu^{cb}{}_\alpha, \quad P^{*b}{}_a = \lambda^\alpha{}_{ac}\nu^{cb}{}_\alpha,$$

$$P_a = -2\lambda^\alpha{}_{a\alpha} - \lambda^\alpha{}_{ab}(\mu^b{}_\alpha + \nu^{*b}{}_\alpha);$$

$$Q^b{}_a = \lambda^{*\alpha}{}_{ac}\mu^{cb}{}_\alpha, \qquad Q^{*b}{}_a = 4\delta^b{}_a + \lambda^{*\alpha}{}_{ac}\mu^{cb}{}_\alpha,$$

$$Q_a = -2\lambda^{*\alpha}{}_{a\alpha} - \lambda^{*\alpha}{}_{ab}(\mu^b{}_\alpha + \nu^b{}_\alpha).$$

Гиперкомплекс (1) будем называть оснащённым в смысле Э. Бортолотти, если к каждой прямой l этого гиперкомплекса присоединена $(n-2)$-плоскость

$$\Pi_{n-2}(l): K_Ax^A = 1, \quad x^1 = K^*{}_Ax^A,$$

не проходящая через прямую l. Внутреннее инвариантное оснащение в смысле Бортолотти определяется объектом

$$K_\alpha = M_\alpha - L^a{}_\alpha M_a, \quad K_a = M_a,$$

$$K^*{}_\alpha = N_\alpha - L^a{}_\alpha L_a, \quad K^*{}_a = L_a.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Стайшене Я.З. О внутренних оснащениях полунеголономных гиперкомплексов SNGr(1,n,2n-3) аффинного пространства A_n, XXVI конференция Литоского Математического Общества, Тезисы докладов, Вильнюс, 1985, 243-244.

On intrinsic normalizations of semi-non-holonomic hypercomplexes SNGr(1,n,2n-3) in affine space.

J. Staišienė

In this paper the differential geometry of semi-non-holonomic hypercomplexes in n-dimensional affine space is constructed in an invariant analytic form. The differential neighbourhoods of first two orders are studied. In some cases the geometrical constructions of intrinsic normalizations (the Cartan normalizations ant the Bortolotti normalizations) are given.