*LMD mokslo darbai*, 174–178
1998, Vilnius

# Finslerio struktūros atraminių pseudolinearų erdvė

**J. Šinkūnas (VPU)**

**Apibrėžimas.** Atraminių pseudolinearų erdvę $P_{n,v}$ [1], kurioje apibrėžtas skaliarinės funkcijos F(x,V) laukas:

$$dF = F_\alpha \omega^\alpha + F_{A\alpha}\Theta^{A\alpha}, \tag{1}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, ... = 1,2,...,n; \quad A,B,C,... = 1,2,...,N),$$

pasižymintis savybe

$$F(x,\lambda V) = \lambda F(x,V), \tag{2}$$

vadinsime Finslerio struktūros atraminių pseudolinearų erdve ir žymėsime $\tilde{F}_{n,v}$.

Kai $h^{A\alpha}_{B\beta} = C^A_B \delta^\alpha_\beta$, $\tilde{F}_{n,v}$ yra Finslerio struktūros atraminių linearų erdvė [2].

Bendroji afininė sietis erdvėje $P_{n,v}$ apibrėžiama formomis

$$\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\omega^\gamma + C^\alpha_{A\beta\gamma}\Theta^{A\gamma}, \tag{3}$$

kur

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}(x, \lambda V) = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}(x, V), \; C^\alpha_{A\beta\varepsilon}(x, \lambda V) = \lambda^{-1} C^\alpha_{A\beta\varepsilon}(x, V), \; C^\alpha_{A\beta\varepsilon} V^{A\varepsilon} = 0, \tag{4}$$

Afininė sietis, apibrėžta (3) formulėmis, erdvėje $P_{n,v}$ indukuoja tiesinę sietį:

$$\tilde{\Theta}^{A\alpha} = \Pi^{A\alpha}_{B\varepsilon}\Theta^{B\varepsilon} + \Pi^{A\alpha}_\varepsilon \omega^\varepsilon, \tag{5}$$

kur

$$\Pi^{A\alpha}_{B\varepsilon} = \delta^A_B \delta^\alpha_\varepsilon + V^{C\gamma}\left(\delta^A_C C^\alpha_{B\gamma\varepsilon} + \delta^\alpha_\gamma h^{A\rho}_{C\tau} C^\tau_{B\rho\varepsilon}\right), \tag{6}$$

$$\Pi^{A\alpha}_\varepsilon = V^{B\gamma}\left(\delta^A_B \Gamma^\alpha_{\varepsilon\gamma} + \delta^\alpha_\gamma h^{A\rho}_{B\tau}\Gamma^\tau_{\varepsilon\rho}\right). \tag{7}$$

Toliau nagrinėsime tik tokias afinines sietis, kurioms $\Pi^{A\alpha}_{B\varepsilon} = \delta^A_B \delta^\alpha_\varepsilon$.

(3) formulėse formas $\Theta^{A\gamma}$ pakeitę formomis $\tilde{\Theta}^{A\gamma}$, gauname:

$$\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + \dot{\Gamma}^\alpha_{\varepsilon\beta}\omega^\varepsilon + C^\alpha_{B\beta\varepsilon}\tilde{\Theta}^{B\varepsilon}, \tag{8}$$

kur

$$\dot{\Gamma}^\alpha_{\varepsilon\beta} = \Gamma^\alpha_{\varepsilon\beta} - C^\alpha_{B\beta\gamma}\Pi^{B\gamma}_\varepsilon. \tag{9}$$

Atraminių pseudolinearų erdvės $P_{n,v}$ su bendrąja afinine sietimi struktūrinės lygtys yra:

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\varepsilon} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\varepsilon} + R^{\alpha}_{\varepsilon\gamma}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\varepsilon} + C^{\alpha}_{B\varepsilon\gamma}\tilde{\Theta}^{B\gamma} \wedge \omega^{\varepsilon}, \tag{10}$$

$$d\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + \tfrac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon} \wedge \omega^{\gamma} + \tfrac{1}{2}S^{\alpha}_{AB\beta\gamma\varepsilon}\tilde{\Theta}^{B\gamma} \wedge \tilde{\Theta}^{A\varepsilon} + P^{\alpha}_{A\beta\varepsilon\gamma}\omega^{\gamma} \wedge \tilde{\Theta}^{A\varepsilon}, \tag{11}$$

$$d\tilde{\Theta}^{A\alpha} = \tilde{\Theta}^{A\gamma} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + h^{A\rho}_{B\tau}\tilde{\Theta}^{B\alpha} \wedge \tilde{\omega}^{\tau}_{\rho} + \tfrac{1}{2}R^{A\alpha}_{\gamma\varepsilon}\omega^{\varepsilon} \wedge \omega^{\gamma} + \tfrac{1}{2}S^{A\alpha}_{BC\varepsilon\gamma}\tilde{\Theta}^{C\gamma} \wedge \tilde{\Theta}^{B\varepsilon} + P^{A\alpha}_{B\gamma\varepsilon}\omega^{\gamma} \wedge \tilde{\Theta}^{B\varepsilon}, \tag{12}$$

kur $R^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, $C^{\alpha}_{A\gamma\varepsilon}$ yra erdvės $P_{n,v}$ sukinio tenzorius ir pseudolinearas, $R^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\tau}$, $S^{\alpha}_{AB\varepsilon\gamma\tau}$, $P^{\alpha}_{A\gamma\varepsilon\tau}$ – atitinkamai pirmasis, antrasis ir trečiasis kartano kreivumo pseudolinearai, o pseudolinearai $R^{A\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, $S^{A\alpha}_{BC\varepsilon\gamma}$ ir $P^{A\alpha}_{B\gamma\varepsilon}$ - atitinkamai pirmasis, antrasis ir trečiasis papildomo kreivumo pseudolinearai.

Invariantinės pirmos ir antros rūšies išvestinės, apibrėžtos afinine sietimi (8), yra (paprastumo dėlei, jos užrašytos dviejų indeksų pseudolinearui):

$$\delta_{\varepsilon}T_{A\gamma} = T_{A\gamma,\varepsilon} - T_{AB\gamma\sigma}\Pi^{B\sigma}_{\varepsilon} - T_{A\sigma}\dot{\Gamma}^{\sigma}_{\varepsilon\gamma} - T_{B\gamma}h^{B\rho}_{A\sigma}\dot{\Gamma}^{\sigma}_{\varepsilon\rho}, \tag{13}$$

$$\delta_{B\varepsilon}T_{A\gamma} = T_{AB\gamma\varepsilon} - T_{A\sigma}C^{\sigma}_{B\gamma\varepsilon} - T_{C\gamma}h^{C\rho}_{A\sigma}C^{\sigma}_{B\rho\varepsilon}. \tag{14}$$

Įrodysime, kad afininės sieties objektas $(\dot{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta},\ C^{\alpha}_{B\beta\gamma})$ aprėpiamas funkcijos F diferencialiniais tęsiniais.

Dalinai pratęsę (1) lygtį, gauname:

$$\nabla F_{A\alpha} \equiv dF_{A\alpha} - F_{A\gamma}\omega^{\gamma}_{\alpha} - F_{B\alpha}\Theta^{B}_{A} = F_{A\alpha\beta}\omega^{\beta} + F_{AB\alpha\gamma}\Theta^{B\gamma}, \tag{15}$$

$$\nabla F_{A\alpha\beta} - F_{A\alpha}\omega^{\gamma}_{\alpha\beta} - F_{B\alpha}h^{B\tau}_{A\rho}\omega^{\rho}_{\tau\beta} - F_{AB\alpha\gamma}\Theta^{B\gamma}_{\beta} = F_{A\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma} + F_{AB\alpha\beta\gamma}\Theta^{B\gamma}, \tag{16}$$

$$\nabla F_{AB\alpha\beta} = F_{AB\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma} + F_{ABC\alpha\beta\gamma}\Theta^{C\gamma}, \tag{17}$$

kur

$$\begin{gathered} F_{A\alpha\beta}(x,\lambda V) = F_{A\alpha\beta}(x,V),\ F_{AB\alpha\beta}(x,\lambda V) = \lambda^{-1}F_{AB\alpha\beta}(x,V),\ F_{AB\alpha\beta}V^{B\beta} = 0, \\ F_{A\alpha\beta\gamma}(x,\lambda V) = F_{A\alpha\beta\gamma}(x,V),\ F_{AB\alpha\beta\gamma}(x,\lambda V) = \lambda^{-1}F_{AB\alpha\beta\gamma}(x,V), \\ F_{ABC\alpha\beta\gamma}(x,\lambda V) = \lambda^{-2}F_{ABC\alpha\beta\gamma}(x,V),\ F_{ABC\alpha\beta\gamma}V^{C\gamma} = F_{AB\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{18}$$

Be to, $F_{AB\alpha\beta} = F_{BA\beta\alpha}$, $F_{ABC\alpha\beta\gamma}$ – simetriški pagal indeksų (A,α), (B,β) ir (C,γ) poras.

Nagrinėsime 3 atvejus: 1) $N = n$; 2) $N > n$; 3) $N < n$.

*1 atvejis.* Jeigu $N = n$, ieškosime tokios erdvės $\tilde{F}_{n,v}$ afininės srities, kuriai pseudolinearo $F_{A\alpha}$ pirmos ir antros rūšies invariantinės išvestinės būtų lygios nuliui, t.y.

$$\delta_\gamma T_{A\alpha} = 0,\ \delta_{B\gamma} T_{A\alpha} = 0. \tag{19}$$

(19) lygybes, pasinaudoję (8), (13) ir (14) lygybėmis, galima užrašyti šitaip:

$$F_{A\alpha\gamma} - F_{A\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\gamma\alpha} - F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}\Gamma^{\tau}_{\gamma\rho} = 0, \tag{19$_1$}$$

$$F_{AB\alpha\gamma} - F_{A\varepsilon}C^{\varepsilon}_{B\alpha\gamma} - F_{C\alpha}h^{C\rho}_{A\tau}C^{\tau}_{B\rho\gamma} = 0. \tag{19$_2$}$$

(19$_1$) ir (19$_2$) lygtis padauginę iš $F^{A\varepsilon}$ (čia $F^{A\varepsilon}F_{A\alpha} = \delta^{\varepsilon}_{\alpha}$) ir sumuodami pagal A, gauname:

$$F^{A\varepsilon}F_{A\alpha\gamma} - \Gamma^{\varepsilon}_{\gamma\alpha} - F^{A\varepsilon}F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}\Gamma^{\tau}_{\gamma\rho} = F^{A\varepsilon}F_{A\alpha\gamma} - \Gamma^{\tau}_{\gamma\rho}\left(\delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\varepsilon}_{\tau} + F^{A\varepsilon}F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}\right) = 0, \tag{19$_1^©$}$$

$$F^{A\varepsilon}F_{AB\alpha\gamma} - C^{\tau}_{B\rho\gamma}\left(\delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\varepsilon}_{\tau} + F^{A\varepsilon}F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}\right) = 0. \tag{19$_2^©$}$$

Jeigu

$$\det\left\|H^{\varepsilon\rho}_{\alpha\tau}\right\| \neq 0, \tag{20}$$

kur

$$H^{\varepsilon\rho}_{\alpha\tau} = \delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\varepsilon}_{\tau} + F^{A\varepsilon}F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}, \tag{21}$$

tai egzistuoja toks atvirkštinis tenzorius $\tilde{H}^{\alpha\tau}_{\varepsilon\mu}$, kad

$$H^{\varepsilon\rho}_{\alpha\mu}\tilde{H}^{\alpha\tau}_{\varepsilon\mu} = \delta^{\rho}_{\varepsilon}\delta^{\tau}_{\mu}. \tag{22}$$

ir iš $\left(19'_1\right)$ $\left(19'_2\right)$ lygčių gauname:

$$\Gamma^{\sigma}_{\gamma\tau} = F^{A\varepsilon}F_{A\alpha\gamma}\tilde{H}^{\alpha\sigma}_{\varepsilon\tau}, \tag{23}$$

$$C^{\sigma}_{B\tau\gamma} = F^{A\varepsilon}F_{AB\alpha\gamma}\tilde{H}^{\alpha\sigma}_{\varepsilon\tau}. \tag{24}$$

Taigi įrodėme teoremą:

1 TEOREMA. *Jeigu* $N = n$ *ir* $\det\left\|H^{\varepsilon\rho}_{\alpha\tau}\right\| \neq 0$, *tai Finslerio struktūros atraminių pseudolinearų erdvės* $\tilde{F}_{n,v}$ *afininės sieties objektas* ($\Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, $C^{\alpha}_{A\gamma\varepsilon}$) *aprėpiamas objektu* (F, $F_{A\alpha}$, $F_{A\alpha\gamma}$, $F_{AB\alpha\gamma}$) *pagal* (23) *ir* (24) *formules.*

2 TEOREMA. (23) *ir* (24) *formulėmis apibrėžta afininė sietis yra plokščia, t.y., pirmasis kartano kreivumo tenzorius, antrasis ir trečiasis kreivumo pseudolinearai lygūs nuliui.*

*Įrodymas.* Iš (15) lygčių, remdamiesi (8), (9), (13) ir (14) formulėmis, gauname:

$$dF_{A\alpha} - F_{A\gamma}\tilde{\omega}^{\gamma}_{\alpha} - F_{B\alpha}h^{B\varepsilon}_{A\tau}\tilde{\omega}^{\tau}_{\varepsilon} = 0. \tag{25}$$

(25) lygybes diferencijuodami išoriniu būdu ir remdamiesi (10) ir (11) struktūrinėmis lygtimis, gauname:

$$\frac{1}{2}\left\{F_{A\gamma}R^{\gamma}_{\alpha\tau\varepsilon} + F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\mu}R^{\mu}_{\rho\tau\varepsilon}\right\}\omega^{\varepsilon}\wedge\omega^{\tau} + \left\{F_{A\gamma}P^{\gamma}_{B\alpha\varepsilon\tau} + F_{C\alpha}h^{C\rho}_{A\mu}P^{\mu}_{B\rho\varepsilon\tau}\right\}\omega^{\tau}\wedge\tilde{\Theta}^{B\varepsilon}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{F_{A\gamma}S^{\gamma}_{BC\alpha\varepsilon\tau} + F_{D\alpha}h^{D\rho}_{A\mu}S^{\mu}_{BC\rho\varepsilon\tau}\right\}\tilde{\Theta}^{B\varepsilon}\wedge\tilde{\Theta}^{C\tau}. \tag{26}$$

Kadangi formos $\omega^{\varepsilon}\wedge\omega^{\tau}$, $\omega^{\tau}\wedge\tilde{\Theta}^{B\varepsilon}$ ir $\tilde{\Theta}^{B\varepsilon}\wedge\tilde{\Theta}^{C\tau}$ tiesiškai nepriklausomos, tai iš (26) lygybių išplaukia:

$$F_{A\gamma}R^{\gamma}_{\alpha\tau\varepsilon} + F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\mu}R^{\mu}_{\rho\tau\varepsilon} = 0, \tag{27}$$

$$F_{A\gamma}P^{\gamma}_{B\alpha\varepsilon\tau} + F_{C\alpha}h^{C\rho}_{A\mu}P^{\mu}_{B\rho\varepsilon\tau} = 0, \tag{28}$$

$$F_{A\gamma}S^{\gamma}_{BC\alpha\varepsilon\tau} + F_{D\alpha}h^{D\rho}_{A\mu}S^{\mu}_{BC\rho\varepsilon\tau} = 0. \tag{29}$$

(27) lygybes padauginę iš $F^{A\sigma}$ ($F^{A\sigma}F_{A\varepsilon} = \delta^{\sigma}_{\varepsilon}$) ir susumavę pagal A, gauname:

$$R^{\sigma}_{\rho\tau\varepsilon}H^{\gamma\rho}_{\alpha\sigma} = 0. \tag{30}$$

Iš (30) lygybių išplaukia, kad

$$R^{\sigma}_{\rho\tau\varepsilon} = 0. \tag{31}$$

Analogiškai įrodoma, kad ir

$$P^{\gamma}_{B\alpha\varepsilon\tau} = S^{\gamma}_{BC\alpha\varepsilon\tau} = 0. \tag{32}$$

*2 atvejis.* Kai $N > n$, pseudolinearui $F_{A\alpha}$ negalima surasti atvirkštinio pseudolinearo. Šiuo atveju nagrinėsime dydžius $F^{A\alpha}$, apibrėžtus šitaip:

$$F^{A\alpha} = \frac{V^{A\alpha}}{F}. \tag{33}$$

Akivaizdu, kad

$$F^{A\alpha}(x,\lambda V) = F^{A\alpha}(x,V),\ F_{AB\alpha\beta}F^{B\beta} = 0. \tag{34}$$

($19_1$) ir ($19_2$) lygtis padauginę iš $F^{A\sigma}$ ir sumuodami pagal A, gauname:

$$F^{A\sigma}F_{A\alpha\gamma} - H^{\sigma}_{\tau}\Gamma^{\tau}_{\gamma\alpha} - F^{A\sigma}F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}\Gamma^{\tau}_{\gamma\rho} = F^{A\sigma}F_{A\alpha\gamma} - \Gamma^{\tau}_{\gamma\rho}\left(H^{\sigma}_{\tau}\delta^{\rho}_{\alpha} + F^{A\sigma}F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}\right) = 0 \tag{35}$$

$$F^{A\sigma}F_{AB\alpha\gamma} - C^{\tau}_{B\rho\gamma}\left(H^{\sigma}_{\tau}\delta^{\rho}_{\alpha} + F^{A\sigma}F_{B\alpha}h^{B\rho}_{A\tau}\right) = 0; \quad \text{čia } H^{\sigma}_{\tau} = F^{A\sigma}F_{A\tau}. \tag{36}$$

Jeigu tenzorius

$$\mathrm{E}^{\rho\sigma}_{\tau\alpha} = \mathrm{H}^{\sigma}_{\tau}\delta^{\rho}_{\alpha} + \mathrm{F}^{\mathrm{A}\sigma}\mathrm{F}_{\mathrm{B}\alpha}\mathrm{h}^{\mathrm{B}\rho}_{\mathrm{A}\tau} \tag{37}$$

turi atvirkštinį tenzorių $\tilde{\mathrm{E}}^{\tau\varepsilon}_{\rho\gamma}$, t.y. kai $\det\left\|\mathrm{E}^{\rho\sigma}_{\tau\alpha}\right\| \neq 0$, iš (35) ir (36) lygčių gauname:

$$\Gamma^{\tau}_{\gamma\rho} = \mathrm{F}^{\mathrm{A}\sigma}\mathrm{F}_{\mathrm{A}\alpha\gamma}\tilde{\mathrm{E}}^{\alpha\tau}_{\rho\sigma}, \tag{38}$$

$$\mathrm{C}^{\tau}_{\mathrm{B}\rho\gamma} = \mathrm{F}^{\mathrm{A}\sigma}\mathrm{F}_{\mathrm{AB}\alpha\gamma}\tilde{\mathrm{E}}^{\alpha\tau}_{\rho\sigma}. \tag{39}$$

Taigi įrodėme teoremą:

3 TEOREMA. *Jeigu* $N > n$ *ir* $\det\left\|\mathrm{E}^{\rho\sigma}_{\tau\alpha}\right\| \neq 0$, *tai erdvės* $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{n,v}}$ *afininės sieties objektas* ($\Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}$, $\mathrm{C}^{\alpha}_{\mathrm{A}\gamma\varepsilon}$) *aprėpiamas objektu* ($\mathrm{F}$, $\mathrm{F}_{\mathrm{A}\alpha}$, $\mathrm{F}_{\mathrm{A}\alpha\gamma}$, $\mathrm{F}_{\mathrm{AB}\alpha\gamma}$) *pagal* (38) *ir* (39) *formules.*

*3 atvejis.* Kai $N < n$, $\det\left\|\mathrm{E}^{\rho\sigma}_{\tau\alpha}\right\| = 0$ ir aukščiau aprašytu būdu negalima rasti afininės sieties objekto. Šiuo atveju afininės sieties objektas turėtų būti aprėpiamas funkcijos F aukštesniais diferencialiniais tęsiniais. Dar nepavyko gauti šio aprėpimo formulių.

**LITERATŪRA**

[1] J. Šinkūnas, Pseudolinearinė sietis atraminių pseudolinearų erdvėje, LMD XXXVIII konferencijos darbai, Vilnius, 1997, 104-109.

[2] Ю. Шинкунас, О пространстве опорных линеаров финслеровой структуры. *Liet. Mat. Rink.* XII, 1 (1972), 221-227.

**Sur l'espace des pseudolinears de structure finslerienne**

*J. Šinkūnas*

L'espace de pseudolinéars d'appuis $P_{n,v}$ [1], avec le champ de la fonction métrique F($x$,V) s'appelle l'espace de pseudolinéars d'appuis de structure finslérienne $\tilde{F}_{n,v}$. De la fonction F et ses prolongements partiels on a reçu l'object de connexion affine et on a étudié quelques propriétés de cette connexion.