LMD mokslo darbai, 179–186
1998, Vilnius

Deuxieme lacune dans les ordres des mouvements des espaces L_n .

A.P. Urbonas (VPU)

1. Introduction

Un des problèmes principales de la théorie des mouvements des espaces est détermination de la mobilité maximale et des lacunes dans les ordres des groupes des mouvements. Par exemple, les espaces de Riemann de la mobilité maximale passède un groupe maximale des transformations en lui même à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres (n-dimension de l'espace). D'autre part il n'y a pas des espaces de Riemann possédants un groupe des mouvements à r - paramètres, où r appartient aux segments $\left[\frac{n(n-1)}{2}+2, \frac{n(n+1)}{2}-1\right]$, $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}+6, \frac{n(n-1)}{2}-1\right]$ etc. Le premier de ses segments est appelé - la première lacune, le deuxième - la deuxième lacune etc. Les espaces dont le groupe des mouvements appartient au segment déposé avant la première lacune s'appelent les espaces de la première lacune. Les espaces, possédant un groupe entre la première et la deuxième lacune - les espaces de la deuxième lacune. En cas des espaces de Riemann les espaces, possédants le groupe de l'intervalle $\left[\frac{n(n-1)}{2}+1, \frac{n(n-1)}{2}\right]$, sont les espaces de la deuxième lacune.

Les mouvements des espaces de la connexion affine, des espaces de Riemann, de Finsler sont étudié assez profondement. On a trouvé la première, la deuxième, la troisième et même la quatrième lacunes. Soulignons que le problème de la détermination des lacunes des espaces n'est pas simple. Malgré que plusieurs savants cherchent les solutions de ces problèmes tout de même aujourd'hui la découverte de toutes les lacunes, par exemple, des espaces de Riemann, attendent son heure! Les mêmes questions, posées dans les espaces dites généralisés ne sont pas étudiés sauf certains cas particuliers. Il faut dire que l'étude des équations des mouvements nous mène aux systèmes infinis et examiner les présente assez grandes difficultées.

Dans l'article [2] nous avons déterminé la première lacune dans les espaces L_n à connexion linéaire et nous avons caractérisé les espaces de la mobilité la plus grande.

Ici nous démontrons qu'il existe deuxième lacune des espaces L_n et déterminons les bornes exactes de cette lacune.

2. Espace L_n . Mouvements dans L_n

Soit L_n un espace des éléments linèaires (x^i, l^k) à connexion linéaire $\Gamma^i_j(x,l)$ [1].

L'objet $\Gamma^i_j(x,l)$ est homogène d'ordre un par rapport aux variables l^k et se transforme selon la loi

$$\bar{\Gamma}^i_j(\bar{x},\bar{l}) = f^i_k g^l_j \Gamma^k_l(x,l) - f^i_{ks} g^k_j l^s,$$

quand on change les coordonnées de base de la manière suivante:

$$\begin{cases} \bar{x}^i = f^i(x^k), (x^k = g^k(\bar{x}^i)) \\ \bar{l}^k = f^k_s l^s. \end{cases} \tag{1}$$

Ici et dans la suite nous notons:

$$f^i_k = \frac{\partial f^i(x^p)}{\partial x^k}, \quad f^i_{kl} = \frac{\partial^2 f^i(x^p)}{\partial x^k \partial x^l}, \ldots$$

$$g^i_k = \frac{\partial g^i(\bar{x}^p)}{\partial \bar{x}^k}, \quad g^i_{kl} = \frac{\partial^2 g^i(\bar{x}^p)}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l}, \ldots$$

Nous désignons la dérivation par rapport à l^k par le point [1].

Le tenseur de la courvature est

$$R^i_{jk} = 2(\partial_{[j}\Gamma^i_{k]} + \Gamma^i_{[j\cdot|p|}\Gamma^p_{k]}).$$

Une transformation infinitésimale de base $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\delta t$ est un mouvement de L_n à connexion linèaire si et seulement si $v^i(x)$ sont les solutions des équations différentielles aux dérivées partielles [1]:

$$\underset{v}{L}\Gamma^k_j = 0, \tag{2}$$

où $\underset{v}{L}$ - symbole de la dérivée de Lie par rapport au $v^i(x)$.

Les conditions d'intégrabilité du système (2) sont [1]:

$$\begin{cases} \underset{v}{L}\Omega^i_{jl} = 0, (\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{j\cdot k} - \Gamma^i_{k\cdot j}), \\ \underset{v}{L}\Gamma^i_{jk\cdot l} = 0, \\ \underset{v}{L}R^i_{jk} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

et toutes les autres obtenues de celles-ci en dérivant jusqu'à la série l'ordre N par rapport à x^k et l^k de la manière covariante sous le signe de la dérivée de Lie. Si le système (3) contient ρ relations indépendantes et la série $N+1$ ne fait pas augmenter le nombre ρ, alors l'espace L_n admet le groupe des mouvements G_r, où $r = n^2+n - \rho$.

3. Deuxième lacune dans les ordres des groupes des mouvements de L_n

Comme nous avons démontré [2], il n'y a pas des espaces L_n ayant le groupe des mouvements G_r, où $n^2< r < n^2+n$, $n >4$.

D'autre part nous avons montré qu'il existe les espaces L_n qui possèdent les groupes des mouvements n^2 et $n^2 + n$ des paramètres.

Ici nous devons souligner qu'il existe aussi les espaces L_n avec le groupe des mouvements de $n^2 - 1$ paramètres. Voici tel exemple.

Exemple. L'espace L_n à connexion linéaire $\Gamma^i_j = x^1\delta^1_j l^i$ a le groupe des mouvements de $n^2 - 1$ paramètres.

Maintenant nous nous occupons de trouver les espaces L_n ayant le groupe des mouvements G_r, où $r > n^2 - n+2$, $n \geq 6$. Alors le système (3) contient $\rho < 2n-2$ équations indépendantes.

Retirons du système (3) les équations

$$\begin{cases} \underset{v}{L}\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0, \\ \underset{v}{L}\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l\cdot s} = 0. \end{cases}$$

Comme dans [2], nous choisissons le système des coordonnées tel que dans le point (x^i, l^k), nous aurons

$$l^i = \delta^i_{\alpha_1} \tag{4}$$

Le symbole $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ signifie une permutation de $(1,2,...,n)$, c'est à dire $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i\neq j$.

Ecrivons les équations au dessus sous la forme explicite [1]:

$$v^s(\nabla_s\Gamma^i_{j.k.l}+2\Omega^i_{ps}\Gamma^p_{j.k.l}+2\Omega^p_{sj}\Gamma^i_{p.k.l} + 2\Omega^p_{sk}\Gamma^i_{j.p.l}+2\Omega^p_{sl}\Gamma^i_{j.k.p}+ 2\Gamma^i_{j.k.l.r}\Omega^r_{sp}\, l^p)$$
$$+v_p{}^s(-\delta^i_s\Gamma^p_{j.k.l}+\delta^p_j\Gamma^i_{s.k.l}+\delta^p_k\Gamma^i_{j.s.l}+\delta^p_l\Gamma^i_{j.k.s}+\Gamma^i_{j.k.l.s}\, l^p) = 0, \tag{5}$$

$$v^s(\nabla_s\Gamma^i_{j.k.l.t}+2\Omega^i_{ps}\Gamma^p_{j.k.l.t}+2\Omega^p_{sj}\Gamma^i_{p.k.l.t}+2\Omega^p_{sk}\Gamma^i_{j.p.l.t}+2\Omega^p_{sl}\Gamma^i_{j.k.p.t}$$
$$+2\Omega^p_{st}\Gamma^i_{j.k.l.p}+2\Gamma^i_{j.k.l.t.r}\Omega^r_{sp}l^p)+v_p{}^s(-\delta^i_s\Gamma^p_{j.k.l.t}+\delta^p_j\Gamma^i_{s.k.l.t}+\delta^p_k\Gamma^i_{j..s.l.t}$$
$$+\delta^p_l\Gamma^i_{j.k.s.t}+\delta^p_t\Gamma^i_{j.k.l.s}+\Gamma^i_{j.k.l.t.s}l^p) = 0. \tag{6}$$

Considérons les cas suivants.

1. $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} \neq 0$; 2. $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} \neq 0 (\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = 0)$;

3. $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} \neq 0$ $(\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = 0)$;

4. $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} \neq 0$ $(\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} = 0)$;

5. $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_4} \neq 0$ $(\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4} = 0)$;

6. $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\alpha_5} \neq 0$.

Remarquons que les relations $\Gamma^{i}_{j\cdot k\cdot l} l^k = \Gamma^{i}_{j\cdot l\cdot k} l^k = 0$ nous donnent $\Gamma^{i}_{j\cdot\alpha_1\cdot l} = 0$ et $\Gamma^{i}_{j\cdot l\cdot\alpha_1} = 0$.

Pour chaque cas nous indiquons le mineur d'ordre $2n$–2 non nul dans les équations (5) et (6).

1. Le mineur d'ordre $3n$–6 constitué des coefficients dans les équations

$$\begin{pmatrix} & \alpha_j & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_l \end{pmatrix}$$ près des fonctions

$v^{\alpha_i}_{\alpha_2}, v^{\alpha_3}_{\alpha_l} v^{\alpha_1}_{\alpha_k}$. ($i,j = 1,2,\ldots,n$; $k,l = 4,5,\ldots n$) est différent de zéro.

Pour les cas 2–5 nous indiquons les mineurs correspondants différents de zéro.

2. Le mineur d'ordre $3n$–5:

$$\begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_1 & \alpha_j & \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_i & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_k & \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}; \ v^{\alpha_3}_{\alpha_i}, v^{\alpha_1}_{\alpha_j}, v^{\alpha_l}_{\alpha_2} \ (i,j = 2,3,\ldots,n;$$

$k,l = 4,5,\ldots,n$).

3. Le mineur d'ordre $4n$–10:

$$\begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_i & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_1 & \alpha_k & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_l & \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & \alpha_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

$$v^{\alpha_1}_{\alpha_j}, v^{\alpha_3}_{\alpha_l}, v^{\alpha_4}_{\alpha_k}, v^{\alpha_k}_{\alpha_2}, v^{\alpha_3}_{\alpha_3}, v^{\alpha_3}_{\alpha_2}, v^{\alpha_4}_{\alpha_3} \ (i,j = 2,3,\ldots,n;\ k,l = 5,6,\ldots,n).$$

4. Le mineur d'ordre $4n$–10:

$$\begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_j & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_k & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_2 \end{pmatrix}; \ v^{\alpha_3}_{\alpha_i}, v^{\alpha_l}_{\alpha_2}, v^{\alpha_4}_{\alpha_k}, v^{\alpha_1}_{\alpha_l}, v^{\alpha_1}_{\alpha_2} \ (i,j = 5,6,\ldots,n;\ k,l = 4,5,\ldots,n).$$

5. Le mineur d'ordre $4n$–12:

$$\begin{pmatrix} & \alpha_i & \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_l & \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_j \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_2 \end{pmatrix};$$

$$v^{\alpha_j}_{\alpha_2}, v^{\alpha_3}_{\alpha_k}, v^{\alpha_4}_{\alpha_l}, v^{\alpha_1}_{\alpha_i}, v^{\alpha_3}_{\alpha_3}, v^{\alpha_1}_{\alpha_2} \quad (i,j = 4,5,\dots,n;\ k,l = 5,6,\dots,n).$$

6. Prenons la transformation $f^{\alpha_5}_{\alpha_4} = t, g^{\alpha_5}_{\alpha_4} = -t,$ les antres $f_i^{\,j} = \delta^i_j, g^i_j = \delta^i_j,$

qui conserve (4) et $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\alpha_4} = 0.$ Donc, $\overline{\Gamma}^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_4} = 0,$ d'où on tire

$$\overline{\Gamma}^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_4} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_4} - 2t\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_5} + t^2\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_5\cdot\alpha_5} = 0.$$

Il en résulte, que $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_5} = 0.$

En rapprochant les résultats de six cas considérés on obtient l'énoncé

$$\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0 \quad (i \neq \alpha_1;\ i \neq j, k, l). \tag{7}$$

La transformation $f^{\alpha_2}_{\alpha_3} = t, g^{\alpha_2}_{\alpha_3} = -t,$ les autres $f^i_j = \delta^i_j, g^i_j = \delta^i_j$ appliquée aux éqalités $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_5} = 0, \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} = 0$ et $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = 0,$ nous donne

$$\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_2\cdot\alpha_4\cdot\alpha_5} = \Gamma^{\alpha_3}_{\alpha_3\cdot\alpha_4\cdot\alpha_5},$$

$$\Gamma^{\alpha_3}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} + \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_4} \quad \text{et} \quad \Gamma^{\alpha_3}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} = \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3} + \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_2\alpha_3} + \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2}.$$

Les relations que nous venons de trouver et (7) nous permettent de présenter le tenseur $\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l}$ $(i \neq \alpha_l)$ sous la forme

$$\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = \delta^i_j \mathrm{A}_{kl} + \delta^i_k \mathrm{B}_{je} + \delta^i_l \mathrm{B}_{jk} \quad (i \neq \alpha_l)$$

Maitenant définissons les grandeurs

$$C_{jkl} = \Gamma^{\alpha_1}_{j\cdot k\cdot l} - \delta^{\alpha_1}_j \mathrm{A}_{kl} - \delta^{\alpha_1}_k \mathrm{B}_{jl} - \delta^{\alpha_1}_l \mathrm{B}_{jk}$$

et tenant compte l'égalité (4) nous aurons la structure de tenseur $\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l}$ suivante

$$\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = \delta^i_j \mathrm{A}_{kl} + \delta^i_k \mathrm{B}_{je} + \delta^i_l \mathrm{B}_{jk} + l^i \mathrm{C}_{jkl}, \tag{8}$$

où A_{ij}, B_{ij}, C_{ijk} sont les tenseur et

$$\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}_{ji}, \tag{9}$$

$$C_{ijk} = C_{ikj} \tag{10}$$

Rappelons que $\Gamma^i_{j\cdot k}$ sont les fonctions homogènes d'ordre zéro par rapport à l^k et pour cela nous avons

$$\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} l^l = 0.$$

En substituant dans cette égalité l'expression (8) nous obtiendrons

$$\delta^i_j \mathrm{A}_{kl} l^l + \delta^i_k \mathrm{B}_{je} l^l + l^i (\mathrm{B}_{jk} + \mathrm{C}_{jkl} l^l) = 0.$$

De cette dernière relation nous déduisons:

$$\mathrm{A}_{kl} l^l = 0, \tag{11}$$

$$\mathrm{B}_{jl} l^l = 0, \tag{12}$$

$$\mathrm{B}_{jk} + \mathrm{C}_{jkl} l^l = 0. \tag{13}$$

Dérivons l'égalité (8) par rapport à l^p et alternons par les indices l et p:

$$\delta^i_j (A_{kl\cdot p} - A_{kp\cdot l}) + \delta^i_k (B_{jl\cdot p} - B_{jp\cdot l}) + \delta^i_l (B_{jk\cdot p} - C_{jkp})$$
$$+ \delta^i_p (C_{jkl} - B_{jk\cdot l}) + l^i (C_{jkl\cdot p} - C_{jkp\cdot l}) = 0.$$

Donc, nous avons

$$\mathrm{A}_{kl.p} = \mathrm{A}_{kp.l},$$
$$\mathrm{B}_{jl.p} = \mathrm{B}_{jp.l},$$
$$\mathrm{C}_{jkl} = \mathrm{B}_{jk.l}. \tag{14}$$

Substituant (14) dans (8) nous aurons

$$\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = \delta^i_j \mathrm{A}_{kl} + \delta^i_k \mathrm{B}_{je} + \delta^i_l \mathrm{B}_{jk} + l^i \mathrm{B}_{jk.l}, \tag{15}$$

Des équations $\underset{v}{L}\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0$, en tenant compte (15) et les propriétés de la dérivée de Lie, nous retirons

$$\underset{v}{L} A_{jk} = 0, \tag{16}$$

$$\underset{v}{L} B_{jk} = 0, \tag{17}$$

$$\underset{v}{L} B_{jk\cdot l} = 0. \tag{18}$$

Démontrons que le tenseur B_{jk} est symètrique. Posons $\mathrm{S}_{jk} = \mathrm{B}_{jk} - \mathrm{B}_{kj}$ et considérons les équations $\underset{v}{L} S_{jk} = 0, \underset{v}{L} S_{jk\cdot l} = 0$ obtenues des (17) et (18).

Supposons que la condition (4) est posée, alors deux cas sont possibles:

$$1)\ S_{\alpha_1\alpha_2} \neq 0; \qquad 2) S_{\alpha_2\alpha_3} \neq 0\,(S_{\alpha_1\alpha_2} = 0)\,.$$

Dans premier cas nous indiquons un mineur d'ordre $2n-2$ différent de zéro. C'est le mineur composé des coefficients dans les équations ($\alpha_1\alpha_i$), ($\alpha_2\alpha_k$), ($\alpha_1\alpha_2\alpha_2$) près des fonctions $v^{\alpha_2}_{\alpha_j}, v^{\alpha_1}_{\alpha_l}, v^{\alpha_1}_{\alpha_2}$ $(i,j = 2,3,\ldots,n;\ k,l = 3,4,\ldots,n)$.

Dans deuxième cas nous prenons le mineur d'ordre 3n-8 des coefficients dans les équations ($\alpha_2\alpha_k$), ($\alpha_3\alpha_l$), ($\alpha_2\alpha_3$), ($\alpha_2\alpha_3\alpha_l$) près des fonctions $v^{\alpha_3}_{\alpha_l}, v^{\alpha_2}_{\alpha_k}, v^{\alpha_2}_{\alpha_2}, v^{\alpha_1}_{\alpha_k}$ $(k,l = 4,5,\ldots,n)$.

Donc, dans notre cas $r>n^2-n+2$, nous devons conclure que $S_{jk} = 0$ et

$$B_{jk} = B_{kj}. \tag{19}$$

Nous continuons examiner des équations (17) et (18). Maintenant nous considérons deux cas possibles :

1) $B_{\alpha_2\alpha_2} \neq 0$

2) $B_{\alpha_2\alpha_3} \neq 0 \quad (B_{\alpha_2\alpha_2} = 0)$.

Remarquons que les composantes $B_{\alpha_1 k} = B_{k\alpha_1} = 0$.

Cela découle de (12) et (19).

Dans le premier cas prenons le mineur d'ordre $2n-2$ non nul formé par les coefficients dans les équations ($\alpha_2\alpha_k$), ($\alpha_2\alpha_2\alpha_l$) près des fonctions $v^{\alpha_2}_{\alpha_l}, v^{\alpha_1}_{\alpha_k}$ $(k,l = 2,3,\ldots,n)$.

Dans le deuxième cas le mineur d'ordre $2n-2$ non nul est formé par les coefficients dans les équations ($\alpha_k\alpha_3$), ($\alpha_2\alpha_3\alpha_k$) près des fonctions $v^{\beta_2}_{\alpha_l}, v^{\alpha_1}_{\alpha_l}$ $(k,l = 2,3,\ldots n)$.

Alors, pour le même raison $(r > n^2 - n + 2)$ nons avons

$$B_{jk} = 0. \tag{20}$$

Si nous raisonnons comme auparavant, nous pouvons prouver que

$$A_{jk} = 0. \tag{21}$$

Mettons les relations (20) et (21) au (15) et nous avons

$$\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0. \tag{22}$$

L'intégration de (22) nous conduit à

$$\Gamma^i_{j\cdot k} = \Lambda^i{}_{jk}(x). \tag{23}$$

Mettons cette expression à l'identité $\Gamma^i_{j\cdot k} l^k = \Gamma^i_j$ et nous obtiendrons

$$\Gamma^i_j = \Lambda^i{}_{jk}(x) l^k. \tag{24}$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer le théorème qui suit.

THEOREME. *Si l'espace L_n à connexion linéaire possède un groupe des movements G_r, où $r>n^2-n+2$, $n \geq 6$, alors l'objet Γ^i_j est de la structure* (24).

Si (24) aura lieu, les conditions d'intégrabilité (3) des équations (2) coïncident avec les conditions d'intégrabilité des équations $\underset{v}{L}\Lambda^i_{jk}(x)=0$.

Comme on sait [3] ces équations ne peuvent pas définir le groupe G_r, où $n^2-n+1< r < n^2-1$. Le théorème ci-dessus et le résultat vient de mentionner nous permettent déclarer le théorème.

THEOREME. *Il n'existe pas les espaces L_n à connexion linéaire $\Gamma^i_j(x,l)$ ayant le groupe des mouvements G_r possédant r de paramètres où $r\in[n^2-n+3,\ n^2-2]$, $n \geq 6$.*

Finalement, pour vérifier que le maximum $r=n^2-n+2$ est atteint, nous considérons un exemple.

Exemple. L'espace L_n à connexion linéaire $\Gamma^i_1=\dfrac{l^2l^i}{l^1}$, $\Gamma^i_2=-l^i$, les autres composantes $\Gamma^i_j=0$ possède un groupe des mouvements à n^2-n+2 paramètres.

Donc, la deuxième lacune des espaces L_n est completement définie.

REFERENCE

[1] A.P. Urbonas, Les mouvement dans l'espace des éléments linéaires à connexion linéaire, *LMD darbų rinkinys,* 1997, 110-114.

[2] A.P. Urbonas, Sur la mobilité maximale des espaces L_n à connexion linéaire, *Liet. Matem. Rink.,* 38, Nr.2, 1998, 265-275.

[3] I.P. Egorov, *Mouvements dans les espaces à connexion affine,* Université de Kazan, 1965, 1-179.

Antroji lakuna erdvių L_n judesių eilėse.

A.P. Urbonas

Nagrinėjami tiesinių elementų erdvių L_n su tiesine sietimi judesiai. Įrodyta, kad nėra erdvių L_n, kurių judesių grupė turėtų r parametrų, kur $r\in[n^2-n+3,\ n^2-2]$, $n \geq 6$. Darbe pateikiami du erdvių pavyzdžiai, kurie įrodo šios lakunos rėžių tikslumą.