LMD mokslo darbai, 187–190
1998, Vilnius

Соответствуюшие направления линейчатых поверхностей гиперкомплекса прямых многомерного аффинного пространства

Я.Ю. Вайнавичене (ВПУ)

Линейчатая поверхность (L) гиперкомплекса Gr(1,*n*,2*n*–3) *n*-мерного аффинного пространства A_n определяется следующими дифференциальными уравнениями ($\alpha,\beta,... = 2,3;\ a,b,... = 4,...,n$);

$$L:\begin{cases}\omega^2 = \lambda_{33}\theta, \omega^3 = -\lambda_{23}\theta, \omega_1^2 = \lambda_{23}\theta,\\ \omega_1^3 = -\lambda_{22}\theta, \omega^a = (\lambda_{23}L_2^a - \lambda_{23}L_3^a)\theta,\\ \omega_1^a = (\lambda_{23}L_2^a - \lambda_{23}L_3^a)\theta (D\theta = 0)\end{cases}$$

(см. [1]). Соответствие

$$\lambda_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} t_1^{\overline{\alpha}} t_2^{\overline{\beta}} = 0 \left(\overline{\alpha} = 3 - \alpha;\ t_1^{\overline{\alpha}} = (t_1)^{\overline{\alpha}}\right) \tag{1}$$

между точками $\vec{M}_p = \vec{A} + t_p\vec{e}_1$ прямой $l = (A, \vec{e}_1)\,(p = 1,2)$ является инволюцией. Двойные точки $\vec{M} = \vec{A} + t\vec{e}_1$ этой инволюции определяются уравнением $\lambda_{\alpha\beta} t^{\overline{\alpha}} t^{\overline{\beta}} = 0$. Они называются точками прикосновения прямой l линейчатой поверхности (L).

Пусть точки $\vec{M}_p, \vec{M}_p + d\vec{M}_p$ и $\vec{M}_p + d\vec{M}_p + \frac{1}{2}d^2\vec{M}_p$ гормонически разделяют точки соприкосновения соответствующих прямых l, l+dl и l+dl+$\frac{1}{2}d^2 l$ поверхности (L). Касательная плоскость $T_{\vec{M}_1}(L)$ поверхности (L) в точке $\vec{M}_1$ лежит в гиперплоскости $\Pi_{n-1}(t_2)$, ассоциированной с точкой M_2, а плоскость $T_{\vec{M}_2}(L)$ - в гиперплоскости $\Pi_{n-1}(t_1)$, тогда и только тогда, когда

$$(T\tau + H)(\lambda_{23} + t_2\lambda_{22}) - (\lambda_{23} + t_1\lambda_{22})\varphi_2 = 0, \tag{2}$$

$$(T\tau + H)(\lambda_{23} + t_1\lambda_{22}) - (\lambda_{23} + t_2\lambda_{22})\varphi_1 = 0, \tag{3}$$

здесь положено

$T = t_2 - t_1, \tau = \tau_2 - \tau_1;$

$$\left(\omega^3 + t_p \omega_1^3\right)\tau_p = dt_p + t_p \omega_1^1 + \omega^1; \tag{4}$$

$$\varphi_p = \varphi_p\left(t_p, K_p^a\right) = a_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t_p^{\overline{\alpha}} t_p^{\overline{\beta}} t_p^{\overline{\gamma}} t_p^{\overline{\varepsilon}} + 2a_{a\alpha\beta\gamma} t_p^{\overline{\alpha}} t_p^{\overline{\beta}} t_p^{\overline{\gamma}} K_p^a + b_{ab\alpha\beta} t_p^{\overline{\alpha}} t_p^{\overline{\beta}} K_p^a K_p^b;$$

$$K_p^a = L_2^a t_p + L_3^a; \tag{5}$$

$$H = H\left(t_1, t_2, K_1^a, K_2^a\right) = a_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} t_1^{\overline{\alpha}} t_1^{\overline{\beta}} t_2^{\overline{\gamma}} t_2^{\overline{\varepsilon}} + aT^2 + a_{a\alpha\beta\gamma} t_1^{\overline{\alpha}} t_1^{\overline{\beta}} t_2^{\overline{\gamma}} K_2^a + a_{a\alpha\beta\gamma} t_1^{\overline{\alpha}} t_2^{\overline{\beta}} t_2^{\overline{\gamma}} K_1^a -$$
$$- 2Ta_{a\alpha} t_1^{\overline{\alpha}} K_2^a + 2Ta_{a\alpha} t_2^{\overline{\alpha}} K_1^a + b_{ab\alpha\beta} t_1^{\overline{\alpha}} t_1^{\overline{\beta}} K_2^a, K_1^b.$$

Направления

$$\left(\vec{M}_1, \tau_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + K_2^a \vec{e}_a\right), \tag{6}$$

$$\left(\vec{M}_2, \tau_2 \vec{e}_1 + t_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + K_1^a \vec{e}_a\right), \tag{7}$$

параметры τ_1 и τ_2 которых связаны соотношениями (2) и (3), называются соответствующими направлениями линейчатой поверхности (L). Направления (6) и (7) являются соответствующими относительно всех линейчатых поверхностей (L) тогда и только тогда, когда

$$(H - T\tau)^2 - \varphi_1 \varphi_2 = 0. \tag{8}$$

Это соотношение устанавливает зависимость между направлениями (6) и (7).

Пусть точки $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ и направление (6) являются фиксированными. Тогда направление (7) в силу соотношения (8) описывает $(n-2)$-мерный конус второго порядка с вершиной в точке $\vec{M}_2$. Этот конус определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \left[H\left(t_1, t_2, \dfrac{x^\alpha}{x^3}, K_2^b\right) - T\left(\tau_1 - \dfrac{x^1 - t_2}{x^3}\right)\right]^2 - \varphi_1\left(t_1, \dfrac{x^\alpha}{x^3}\right) \cdot \varphi_2\left(t_2, K_2^b\right) = 0, \\ x^2 - t_1 x^3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Если параметры t_2 и K_2^a направления (6) связаны соотношением

$$\varphi_2\left(t_2, K_2^a\right) = 0 \tag{10}$$

то конус (9) вырождается в двойную $(n-2)$-плоскость.

$$\begin{cases} H\left(t_1, t_2, \dfrac{x^a}{x^3}, K_2^b\right) - T \cdot \left(\tau_1 - \dfrac{x^1 - t_2}{x^3}\right) = 0, \\ x^2 - t_1 x^3 = 0. \end{cases}$$

Пусть величины t_2 и K_2^a, удовлетворяющие соотношению (10) являются переменными. Тогда направление (6) описывает инвариантную гиперпаверхность четвертого порядка

$$a_{a\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\varepsilon + 2a_{a\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^a + b_{ab\alpha\beta} x^\alpha x^\beta x^a x^b = 0 \tag{11}$$

Прямая (P,Q), где P – любая точка инвариантной трёхмерной поверхности

$$a_{a\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + b_{ab\alpha\beta} x^\alpha x^\beta x^b = 0, \tag{12}$$

а Q – любая точка (n–2)-плоскости $\Pi_{n-2} : x^\alpha = 0$, высекает на гиперповерхности (11) такие две, нележащие в Π_{n-2}, точки, которые с точками P и Q образуют гармоническую четверку. Этим свойством и определяется инвариантная 3-мерная поверхность (12).

При движении прямой l по линейчатой поверхности (L) (n–2)-плоскость Π_{n-2} перемещается и её характеристикой является (n–4)-плоскость

$$x^\alpha = 0, x^1 \omega_1^\alpha + x^a \omega_a^\alpha + \omega^\alpha = 0 \tag{13}$$

Пусть величины t_p и L_α^a в соотношениях (1), (4) и (5) фиксированы. Тогда отношение величин $\lambda_{33} : \lambda_{23} : \lambda_{22}$ будет изменяться с произволом одного параметра и характеристика (13) (n-2) - плоскости Π_{n-2} опишет (n–2)-мерную квадрику

$$\begin{gathered} \left[T\left(t_1 - x^1\right) + H_a^1 x^a\right] \cdot \left[T\left(x^1 - t_2\right) + H_b^2 x^b\right] - \left(a_{a\alpha\beta\gamma} t_2^{\bar\alpha} t_2^{\bar\beta} t_2^{\bar\gamma} + b_{ab\alpha\beta} t_2^{\bar\alpha} t_2^{\bar\beta} K_2^b\right) \\ \times \left(a_{c\varepsilon\tau\mu} t_1^{\bar\varepsilon} t_2^{\bar\tau} t_2^{\bar\mu} + b_{ce\varepsilon\tau} t_1^{\bar\varepsilon} t_1^{\bar\tau} K_1^e\right) \cdot x^a x^c = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

$$x^\alpha = 0,$$

где

$$\begin{aligned} H_a^1 &= T\left(-2a_{a\alpha} t_1^{\bar\alpha} + b_{ab} K_1^b\right) + a_{a\alpha\beta\gamma} t_1^{\bar\alpha} t_1^{\bar\beta} t_2^{\bar\gamma} + b_{ab\alpha\beta} t_1^{\bar\alpha} t_2^{\bar\beta} K_1^b, \\ H_a^2 &= -T\left(-2a_{a\alpha} t_2^{\bar\alpha} + b_{ab} K_2^b\right) + a_{a\alpha\beta\gamma} t_1^{\bar\alpha} t_2^{\bar\beta} t_2^{\bar\gamma} + b_{ab\alpha\beta} t_1^{\bar\alpha} t_2^{\bar\beta} K_2^b. \end{aligned}$$

Квадрика (14) зависит от координат точек $\vec{M}_p$ и от коэффициентов L_α^a, определяющих нормальное пространство первого рода $N_3(l)$ гиперкомплекса Gr(1,n,2n–3).

Полярной плоскостью точки $\vec{M}_3 = \vec{A} + t_3\vec{e}_1$ относительно квадрики (14) будет (n–3)-плоскость

$$\begin{cases} \left(x^1 - L_a x^a\right)\left(t_1 + t_2 - 2t_3\right) + \left(M_a x^a - 1\right)\left(2t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3\right) - H_{a\alpha\beta\gamma} t_1^{\overline{\alpha}} t_2^{\overline{\beta}} t_3^{\overline{\gamma}} x^a = 0, \\ x^\alpha = 0 \end{cases} \tag{15}$$

где

$$M_a = 2a_{a2} - \frac{1}{3}\left(b_{ab22}L_3^b - b_{ab23}L_2^b\right) - b_{ab}L_2^b, \tag{16}$$

$$L_a = -2a_{a3} + \frac{1}{3}\left(b_{ab23}L_3^b - b_{ab33}L_2^b\right) + b_{ab}L_3^b, \tag{17}$$

$$H_{a\alpha\beta\gamma} = a_{a\alpha\beta\gamma} + b_{ab(\alpha\beta}L_{\gamma)}^b,$$

причём $(A = 2,...,n)$

$$\nabla H_{a\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}H_{a\alpha\beta\gamma}\left(\omega_1^1 + 3\omega_\varepsilon^\varepsilon\right) = H_{a\alpha\beta\gamma,A}\omega^A + \tilde{H}_{a\alpha\beta\gamma}\omega_1^3 + H_{a\alpha\beta\gamma,b}\omega_1^b.$$

Следовательно, система величин $H_{a\alpha\beta\gamma}$ образует тензор.

Нормальное пространство второго рода

$$N_{n-4}(l);\ M_a x^a = 1,\ x^1 = L_a x^a,\ x^\alpha = 0,$$

соответствуюшее нормальному пространству первого рода

$$N_3(l) : x^a = L_\alpha^a x^\alpha$$

в соответствии, определённом соотношениями (16) и (17), полностью лежит в полярной (n–3)-плоскости (15) тогда и только тогда, когда нормальное пространство $N_3(l)$ и три точки $\vec{M}_1, \vec{M}_a$ и $\vec{M}_3$ находятся в инвариантном соответствии

$$H_{a\alpha\beta\gamma} t_1^{\overline{\alpha}} t_2^{\overline{\beta}} t_3^{\overline{\gamma}} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вайнавичене Я.Ю, Геометрия гиперкомплексов прямых многомерного аффинного пространства. I., *Liet. Matem. Rink.*, 33, Nr.1, 1993, 118-132.

Corresponding directions line surfaces of line hypercomplex in multidimensional affine space

J. Vainavičienė

In this article the study of line hypercomplex in n-dimensional affine space A_n is continued (see [1]). There are found some algebraic hypersurfaces and correspondence between the normal spaces. The geometrical interpretations of some geometric objects are given.