

Kompiuterinės algebros panaudojimas mokymo procese

A. Domarkas, G. Misevičius, V. Pakalnytė,
A. Pincevičius, R. J. Rakauskas (LKA)

LKA kaupiasi tam tikra patirtis panaudojant kompiuterinę sistemą MAPLE apmokant kariūnus aukštosios matematikos elementų bei dėstant matematinius metodus vadyboje. Ši mokymo kryptis labai perspektyvi, nes leis sujungti s vieningą mokymo sistemą klasikinius matematinius mokslus bei informatikos dėstymą. Šiuolaikinė kompiuterinė algebra leidžia spręsti tipinius uždavinius iš visų matematikos kursų, dėstomų aukštosiose mokyklose. Toliau mes panagrinėsime atskirai svarbiausias temas, kuriose kompiuterinės algebros panaudojimas yra labai efektyvus.

Tiesinės algebros uždaviniai. Praktinių užsiėmimų metu ne kompiuterių klasėje yra nagrinėjami tik antrosios ir trečiosios eilės matricos, determinantai, lygčių sistemos, vektoriai ir kiti tiesinės algebros objektai. Darbui su bet kurios eilės objektais sėkmingai pritaikoma simbolinio skaičiavimo sistema MAPLE. Svarbiausia yra išmokyti svesti šiuos objektus s kompiuterio atmintis ir ssisavinti MAPLE komandas, atliekančias su jais reikalingus veiksmus. Tiesinės algebros uždavinių sprendimas ant popieriaus užima daug laiko, o kompiuteris tai atlieka momentaliai. Kompiuteriu galima patikrinti eilę algebros teoremų ir teiginių, kurių srodymas nepateikiamas paskaitose. Tai padeda intensyvinti ir išplėsti tiesinės algebros kursą. Todėl naudojant kompiuterius nedideliame algebros kurse galima nagrinėti tokias temas, kaip matricų tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai, tiesinių transformacijų diagonalizavimas, kvadratinės formos ir kt.

Funkcijų grafikų tyrimas ir brėžimas. Tiriant funkcijos $y = f(x)$ grafiką pradžioje yra naudinga nubrėžti grafiką pasinaudojant komanda

```
> plot(f(x), x=a..b, y=c..d);
```

Toliau yra patikslinami rėžiai a, b, c, d , kad ekrane matytume charakteringiausias grafiko dalis. Kituose etapuose, randamos grafiko asimptotės, ekstremumo ir susikirtimo su koordinačių ašimis taškai. Pastarųjų taškų ieškojimui panaudojamos komandos `solve` ir `fsolve`. Taip pat randame didėjimo, mažėjimo ir iškilumo intervalus. Grafikų tyrime kompiuterio panaudojimas yra labai efektingas. Neišreikštinių funkcijų, kurių lygtis yra $F(x, y) = 0$, grafikų brėžimui yra naudojama komanda `implicitplot` iš grafinio paketo `plots`:

```
> plots[implicitplot](F(x,y)=0, x=a..b, y=c..d);
```

Dviejų kintamųjų funkcijos $z = f(x, y)$ grafiko brėžimui yra naudojama komanda

```
> plot3d(f(x,y), x=a..b, y=c..d);
```

Yra galimybė grafiką pasukti, keisti grafiko stilių ir koordinačių ašių padėts, nubrėžti pjūvių plokštumomis grafikus. Galima nubrėžti lygio linijas. Nesunkiai randami ekstremumo taškai. Galima nubrėžti kreives plokštumoje ir trimatėje erdvėje, išreiktas parametrinėmis lygtimis. Yra galimybė brėžti grafikus kitose koordinačių sistemose.

Apytikslis skaičiavimas. Su komanda `evalf` norimu tikslumu galima apytiksliai apskaičiuoti reiškinius, funkcijos reikšmę, apibrėžtins integralą arba eilutės sumą. Nebereikia naudotis funkcijų reikšmių matematinėmis lentelėmis. Su komanda `fsolve` apytiksliai galima išspręsti lygtis ir lygčių sistemas. Yra naudinga pradžioje grafiškai svertinti sprendinių padėts.

1 pavyzdys. Išspręsti lygčių sistemą :

```
> sist:={sin(x+y)-1.6*x=0, x^2+y^2-1=0};
```

$$\text{sist} := \{\sin(x + y) - 1.6x = 0, x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

Plokštumos taškus (x,y), kurie tenkina lygčių sistemą, galima pavaizduoti plokštumoje.

```
> plots[implicitplot](sist, x=-1..1, y=-1..1);
```

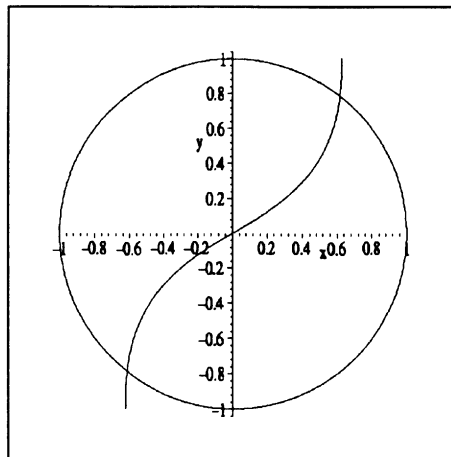
Matome, kad turi būti du sprendiniai: I ketvirtyje ir III ketvirtyje. Toliau sprendžiame apytiksliai, nurodydami ketvirčius:

```
> sol1:=fsolve({sin(x+y)-1.6*x=0, x^2+y^2-1=0}, {x,y}, x=-1..0, y=-1..0);
```

$$\text{sol1} := \{x = -.6163066467, y = -.7875062649\}$$

```
> sol2:=fsolve({sin(x+y)-1.6*x=0, x^2+y^2-1=0}, {x,y}, x=0..1, y=0..1);
```

$$\text{sol2} := \{x = .6163066467, y = .7875062649\}$$



Apytikslis sprendimo algoritmų nebūtina programuoti, nes jie yra sdiegti vidinėje MAPLE programoje. Tačiau yra galimybė kurti savo algoritmus ir juos programuoti.

Funkcijų ribų radimas, sudėtinių funkcijų išvestinių apskaičiavimas, tikslus integralų apskaičiavimas, diferencialinių lygčių sprendimas. Mes manome, kad mokymo procese šiose srityse MAPLE panaudojimas yra ne toks efektyvus. Tai yra susiję su tuo, kad kompiuterinė algebra nepateikia uždavinių sprendimų, o pateikia tik atsakymus. Tačiau yra galimybė užprogramuoti su MAPLE visus sprendimo etapus. Bet tai reikalauja gilesnio MAPLE sistemos pažinimo ir tam tikrų programavimo sgūdžių. Matematikos taikymo prasme MAPLE panaudojimas šiose srityse yra naudingas, nes daugumą šių uždavinių MAPLE gali išspręsti. Galima grafiškai pavaizduoti diferencialinių lygčių kryptčių laukus, integralines kreives. Diferencialines lygtis galima spręsti apytiksliai arba panaudojant laipsnines eilutes.

2 pavyzdys. Nubrėšime diferencialinės lygties $y' = y^2 - x^2 + 1$ kryptčių lauką ir sprendinių su pradinėmis sąlygomis $y(2) = 0$, $y(2) = 2$, $y(2) = 3$ grafikus:

```
> with(DEtools):
```

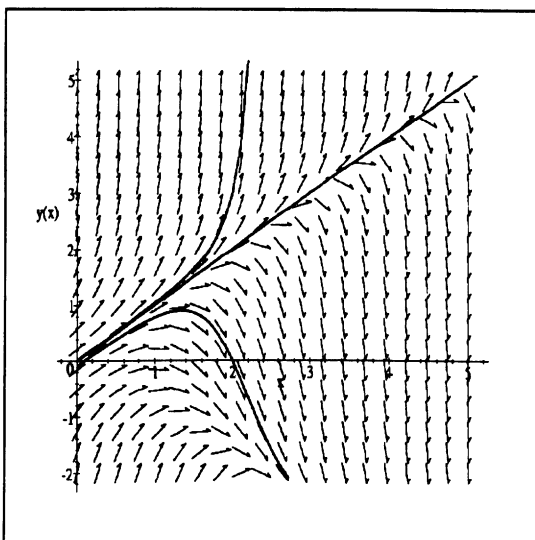
```
> DEplot({diff(Y(x),x)=Y(x)^2-x^2+1}, {Y(x)}, x=0..5,
  [[Y(2)=0], [Y(2)=2], [Y(2)=3]], y=-2..5, stepsize=.1);
```

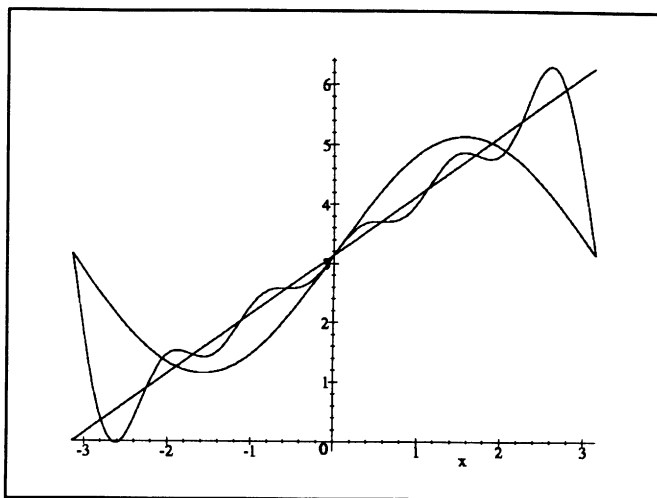
Galima sprendinių ieškoti laipsninių eilučių pavidalu:

```
> dsolve({diff(Y(x),x)=Y(x)^2-x^2+1, Y(2)=0}, Y(x), series);
```

$$y(x) = -3(x-2) - 2(x-2)^2 + \frac{8}{3}(x-2)^3 + 3(x-2)^4 - \frac{12}{5}(x-2)^5 + O((x-2)^6)$$

Šis sprendinys yra pakankamai tikslus tik taško $x = 2$ aplinkoje.





Funkcijų skleidimas Furjė ir Teiloro eilutėmis. MAPLE sistemoje nėra komandos, kuri skleidžia funkciją Furjė eilute. Bet ją nesunku sudaryti patiems. Mes apibrėžiame Furjė koeficientų ir dalinės sumos apskaičiavimo funkcijas:

```
> a:=n->1/l*Int(f(x)*cos(n*x*Pi/l),x=-l..l):
> b:=n->1/l*Int(f(x)*sin(n*x*Pi/l),x=-l..l):
> S:=n->value(a(0)/2+sum(a(m)*cos(m*Pi*x/l)+
  b(m)*sin(m*Pi*x/l),m=1..n)):
```

3 pavyzdys. Intervale $(-\pi, \pi)$ išskleisime Furjė eilute funkciją $f(x) = \pi + x$.

```
> f:=x->Pi+x: l:=Pi:
```

Gauname skleidinį iki $n = 5$:

```
> S(5);
```

$$\pi + 2 \sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x)$$

```
> plot([f(x), S(1), S(5)], x=-l..l);
```

Funkcijų skleidimui Teiloro eilute gali būti panaudotos komandos `series`, `taylor` ir `mtaylor`.

4 pavyzdys.

```
> series(exp(x)/x, x=0, 8);
```

$$x^{-1} + 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{720}x^5 + \frac{1}{5040}x^6 + O(x^7)$$

Šioje komandoje yra taško $x = 0$ aplinkoje išskleista funkcija $\exp(x)/x$, imant 8 skleidinio narius.

Komanda `mtaylor` yra skirta keleto kintamųjų funkcijos skleidimui.

5 pavyzdys.

```
> readlib(mtaylor):
> mtaylor(sin(x^2+y^2), [x,y]);
```

$$x^2 + y^2$$

```
> mtaylor(sin(x^2+y^2), [x,y], 8);
```

$$x^2 + y^2 - 1/6 x^6 - 1/2 y^2 x^4 - 1/2 y^4 x^2 - 1/6 y^6$$

Galima su animacija pavaizduoti, kaip skleidinio dalinė suma artėja prie skleidžiamos funkcijos.

Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Šioje srityje MAPLE paketas taip pat efektyviai panaudojamas. MAPLE "žino" pagrindines pasiskirstymo funkcijas. Nebereikia naudotis statistinėmis lentelėmis. Kompiuteris gali apskaičiuoti lentelių reikšmes su pasirinktu tikslumu ir su bet kuriais parametrais. Galima gauti didesnę sprendinių tikslumą.

6 pavyzdys. Greitaišaudžiu kulkosvaidžiu paleista 1000 šūvių prieš lėktuvą. Kiekvieno šūvio pataikymo tikimybė 0,02. Raskite tikimybę, kad pataikyta nuo 15 iki 25 kartų.

Pataikymų skaičius yra pasiskirstęs pagal Bernulio dėsnį. Randame tikimybę:

```
> P=sum(binomial(1000,k)*0.02^k*0.98^(1000-k), k=15..25);
```

$$P = .7875386940$$

Be kompiuterio reikėtų naudotis Laplaso integraline teorema ir iš lentelės imti apytiksles Laplaso funkcijos reikšmes. Aišku, kad rezultatas būtų ne toks tikslus.

7 pavyzdys. Studento skirstinio lentelės reikšmės gaunamos, pasinaudojus procedūra:

```
> stj:=proc(alpha::positive, n::posint)
  fsolve(int((1+x^2/n)^(-(n+1)/2), x=-t..t)/
  sqrt(n*Pi)*GAMMA((n+1)/2)/GAMMA(n/2)=1-alpha, t, 0..100);
end;
```

Galima gauti Studento skirstinio reikšmes su parametrais α ir n . Pavyzdžiui, kai $\alpha = 0,8$, $n = 1$:

```
> stj(0.8,1);
```

$$.3249196962$$

Yra sudarytos procedūros kitų pagrindinių lentelių reikšmių apskaičiavimui. Statistikos uždaviniams spręsti yra pritaikomas paketas *stats*. Naudojantis šiuo paketu yra atliekamas statistinių duomenų apdorojimas, jų grafinis vaizdavimas, iškeliamos ir tikrinamos statistinės hipotezės, sprendžiami koreliacijos uždaviniai. Statistiniai metodai yra pritaikomi fizikos laboratorinių darbų eksperimentų rezultatų apdorojimui.

Matematiniai metodai vadyboje. Tiesinio programavimo uždaviniams spręsti yra naudojamas paketas *simplex*. Šiame pakete esančiomis komandomis *minimize* ir *maximize* galima išspręsti pakankamai bendrus uždavinius. Dviejų kintamųjų atveju

su komanda `plots[inequal]` galima grafiškai pavaizduoti tiesinių nelygybių sistemos sprendinių aibę. Á tiesinio programavimo uždavins yra suvedami daugelis ekonomikos, transporto ir gamybos planavimo uždavinių. MAPLE paketas efektyviai pritaikomas dinaminio, sveikaskaitinio ir netiesinio programavimo uždaviniuose. Šiuo atveju paruoštų programų nėra. Todėl tenka jas kurti patiems.

8 pavyzdys. Trijuose sandėliuose yra miltai atitinkamai po 90, 70 ir 50 tonų. Reikia sudaryti optimalų miltų išvežiojimo planą s keturias parduotuves atitinkamai po 80, 60, 40, 30 tonų, jei pervežimų kainų matrica yra:

```
> A:=linalg[matrix]([ [2,1,3,2], [2,3,3,1], [3,3,2,1] ] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Čia matricos elementas, esantis i-oje eilutėje ir j-ame stulpelyje, yra vieno svorio vieneto pervežimo kaina iš i-ojo sandėlio į j-ąją parduotuvę.

Sprendimas. Ávedame duomenis apie sandėlius ir parduotuves:

```
> S:=[90,70,50]: m:=nops(S): R:=[80,60,40,30]: n:=nops(R):
```

Tegu $x_{i,j}$ tonų reikia pervežti iš i-ojo sandėlio į j-ąją parduotuvę.

```
> apribojimai:={seq(sum(x[i,j], j=1..n)=S[i], i=1..m),
  seq(sum(x[i,j], i=1..m)=R[j], j=1..n)};
```

$apribojimai := \{x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 80, x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 60, x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 40, x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} = 30, x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 90, x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 70, x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 50\}$ Apibrėžiame tikslo funkciją:

```
> sum(sum(A[i,j]*x[i,j], j=1..n), i=1..m); F:=":
```

$2x_{1,1} + x_{1,2} + 3x_{1,3} + 2x_{1,4} + 2x_{2,1} + 3x_{2,2} + 3x_{2,3} + x_{2,4} + 3x_{3,1} + 3x_{3,2} + 2x_{3,3} + x_{3,4}$

Minimizuojame tikslo funkciją ir gauname atsakymą:

```
> ats:=simplex[minimize]( F, apribojimai, NONNEGATIVE );
```

$ats := \{x_{2,3} = 0, x_{1,3} = 0, x_{3,2} = 0, x_{3,1} = 0, x_{3,3} = 40, x_{2,4} = 20, x_{3,4} = 10, x_{1,4} = 0, x_{2,2} = 0, x_{1,2} = 60, x_{1,1} = 30, x_{2,1} = 50\}$ Pervežimų kaina yra

```
> 'F'[min]=subs(ats,F);
```

$$F_{min} = 330$$

Daugiau MAPLE taikymo pavyzdžių bus galima rasti autorių kolektyvo vadovėlyje "Aukštoji matematika" (su papildomu diskeliu), kuris ruošiamas TEV leidykloje.

Usage of computer algebra in teaching process

A. Domarkas, G. Misevičius, V. Pakalnytė, A. Pincevičius, R. J. Rakauskas (LKA)

This work was intended to motivate the necessity of intensive training of mathematics utilising the computer algebra MAPLE in Lithuanian Military Academy. Such trend is promising because it gives the possibility to combine the teaching of classical mathematics with theory of informatics. Modern computer

algebra is able to solve the typical problems of higher mathematics teaching in universities and academies or another high schools. We analyse the principals subjects. Where one can get the best efficiency in utilising the computer algebra. Namely, it is the problems of linear algebra, analyse of graphs, numerical calculation, integration, solution of differential equations, statistics for management, linear programming. The authors share his experience of utilising of computer algebra to effect the education of cadets. One can have a lot of examples of utilising of computer algebra in the manual of higher mathematics (with supplementary disquiet) to be appeared.