LMD mokslo darbai, 256–262
1998, Vilnius

Intervalų metodo naudojimas kai kurių tipų nelygybėms spręsti

P. Grebenečenkaitė (ŠU)

Jei mokiniai giliau suvoktų intervalų metodą, tai nesunkiai spręstų sudėtingesnes nelygybes.

Matematikos kurse nagrinėjamos nelygybės pavidalo

$$P(x)Q(x) \vee 0 \tag{1}$$

ir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \ |x| \vee 1, \ u^{v} \vee a, \tag{2}$$

$\log_u v \vee a$, kur u ir v funkcijos nuo x.

Spręsdami (1) nelygybę naudosimės intervalų metodu ir nurodysime pertvarkius lengvinančius (2) nelygybių sprendimą.

Nagrinėjame (1) nelygybę, kur $P(x)$ ir $Q(x)$ – daugianariai.

Pažymime (1) nelygybės kairiąją pusę $F(x)$.

$F(x) \equiv P(x)Q(x) \vee 0$. Išskaidome $F(x)$ dauginamaisiais

$$F(x) = a(x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2}\ldots(x-x_k)^{l_k}$$
$$\times (x^2+p_1x+q_1)^{n_1}(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{n_m},$$

kur $x_1 < x_2 < .. < x_k$ – funkcijos $F(x)$ nuliai. Tarkime, kad $a > 0$. Aišku, kad trinarių laipsnių sandauga teigiama. Skaičių ašyje atidedame $x_1, x_2, .., x_k$ reikšmes, kurios skaičių ašį padalija į $k+1$ intervalų.

Pastebime, kad jei $x > x_k$, tai $F(x)>0$. Tada funkcija $F(x)$ kiekviename iš šių intervalų yra pastovaus ženklo, o pereidama nuo vieno intervalo prie kito keičia (nekeičia) ženklą į priešingą, priklausomai nuo to ar dauginamasis pakeltas nelyginiu laipsniu (lyginiu laipsniu).

Užrašome atsakymą.

Nelygybės $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$ sprendimas suvedamas į (1) nelygybės sprendimą.

Pavyzdžiui, išspręsime nelygybę $\dfrac{4x^3-3x-1}{x^2(x^2-4)} < 0$.

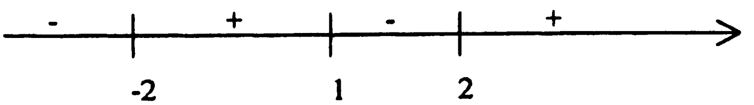
Išskaidome trupmenos skaitiklį ir vardiklį dauginamaisiais:

$$\frac{4x^3+4x^2+x-4x^2-4x-1}{x^2(x-2)(x+2)}<0,$$

$$\frac{x(4x^2+4x+1)-(4x^2+4x+1)}{x^2(x-2)(x+2)}<0,$$

$$\frac{x(2x+1)^2-(2x+1)^2}{x^2(x-2)(x+2)}<0, \qquad \frac{(x-1)(2x+1)^2}{x^2(x-2)(x+2)}<0.$$

Gautoji nelygybė ekvivalenti nelygybei $\frac{(x-1)}{(x-2)(x+2)}<0$, kai $x\neq-\frac{1}{2}$, $x\neq0$. Skaičiai -2; 1; 2 dalija skaičių ašį į keturis intervalus:



$x<-2,\ 1<x<2$.

Įvedame eilę pertvarkių, kurie palengvins nelygybių sprendimą.

1. $|x|\vee 1 \Leftrightarrow x^2\vee 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\vee 0$.

2. $u^v \vee a\ (a>0) \Rightarrow (u-1)(v-\log_u a)\vee 0$.

2'. $u^v\vee 1 \Rightarrow (u-1)v\vee 0 \Rightarrow (u-1)v\vee 0$.

3. $\log_u v\vee a \Rightarrow (u-1)(v-u^a)\vee 0$.

3'. $\log_u v\vee 1 \Rightarrow (u-1)(v-u)\vee 0$.

3''. $\log_u v\vee 0 \Rightarrow (u-1)(v-1)\vee 0$.

Čia u ir v – funkcijos nuo x.

Parodysime (3) pertvarkio teisingumą:

$\log_u v\vee a\ (u>0,\ u\neq1,\ v>0)$ arba

$\log_u v\vee \log_u u^a$.

Galimi du atvejai:

a) $$\left.\begin{matrix}u>1\\ v\vee u^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}u-1>0\\ v-u^a\vee 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow (u-1)(v-u^a)\vee 0;$$

b) $$\left.\begin{matrix}u<1\\ v\wedge u^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}u-1<0\\ v-u^a\wedge 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow (u-1)(v-u^a)\wedge 0.$$

Pavyzdžiui spręsdami nelygybę $(x^2+x+1)<1$.

Pastebime, kad $x^2+x+1>0$ su visomis x reikšmėmis ir gauname $(x^2+x+1-1)\,x<0$ arba $x^2(x+1)<0$.

Ats.: $x<-1$

Kiekvienos (1), (2) nelygybių pertvarkiai pakeičia duotųjų nelygybių apibrėžimo sritis. Naujųjų nelygybių apibrėžimo sritys platesnės negu duotųjų. Vadinasi, reikia surasti duotųjų nelygybių apibrėžimo sritis. Ir gautųjų po pertvarkių nelygybių sprendimai turi priklausyti duotųjų nelygybių apibrėžimo sritims.

Išspręsime nelygybę

$$(2^{x^2+1}-32)(|3x+1|-4)(\sqrt[4]{x+1}-1)\log_{x+3}(x^2-6x+6)<0.$$

Surandame duotosios nelygybės apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1 \\ x^2-6x+6>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[-1;\,3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3};\,\infty\right).$$

Atliekame pertvarkius ir gauname nelygybę, ekvivalenčią duotajai jos apibrėžimo srityje:

$$(x^2+1-5)((3x+1)^2-16)((x+3)-1)((x^2-6x+6)-1)((x+1)-1)<0$$

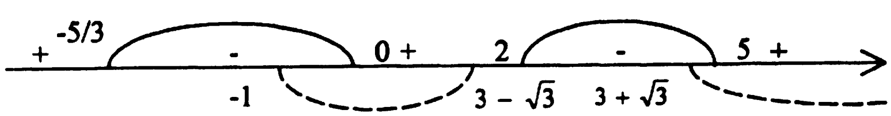
arba

$$(x+2)(x-2)(3x+5)(3x-3)(x+2)(x^2-6x+5)x<0,$$

$$(x+2)^2(x-1)^2(x-2)(x+\frac{5}{3})(x-5)x<0,$$

$$(x-2)(x+\frac{5}{3})(x-5)x<0.$$

Gautąja nelygybę sprendžiame intervalų metodu



ir išrenkame tuos sprendinius, kurie priklauso duotosios nelygybės apibrėžimo sričiai:

$$x\in\left[-1;\,0\right)\cup\left(3+\sqrt{3};\;5\right).$$

Išspręsime nelygybę

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1.$$

Duotosios nelygybės apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \dfrac{2x-1}{x-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty).$$

Perrašome nelygybę

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} - 1 > 0.$$

Atliekame pertvarkius ir gauname nelygybę ekvivalenčią duotajai jos apibrėžimo srityje:

$$(x-1)\left(\frac{2x-1}{x-1} - x\right) > 0,$$

$$(x-1)\left(\frac{x^2-3x+1}{x-1}\right) < 0, \text{ arba } x^2 - 3x + 1 < 0,$$

kurios sprendimas $x \in \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Išrenkame tuos sprendinius, kurie priklauso duotosios nelygybės apibrėžimo sričiai:

$$x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Išspręskime nelygybę

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0.$$

Surandame nelygybių apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 2x^2 - 7x + 6 \neq 1, \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x > 0, \\ x < \dfrac{2}{3} \text{ arba } x > 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Iš čia $x \in (0;1) \cup \left(1;\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(2;\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2};\infty\right)$.

Atlikę pertvarkius gauname nelygybę, ekvivalenčią duotajai jos apibrėžimo srityje:

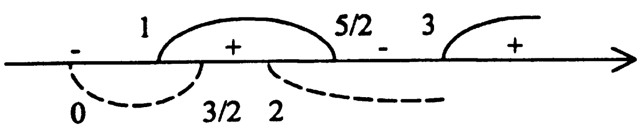
$$\left(\sqrt{2x^2 - 7x + 6} - 1\right)\left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0,$$

$$(2x^2 - 7x + 6 - 1)\left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0,$$

$$(2x^2 - 7x + 6 - 1)(x - 3) > 0,$$

$$(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 3) > 0.$$

Paskutiniąją nelygybę sprendžiame intervalų metodu ir jos sprendinius suderinę su duotosios nelygybės apibrėžimo sritimi, gauname atsakymą



$$x \in \left(1;\frac{3}{2}\right) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right) \cup (3;+\infty).$$

Kartais taikome ir individualius sprendimo būdus.

Pvz., išspręskime nelygybę $\left|x^2 + 3x - 3\right| \leq \left|x^2 - 2x - 2\right|$.

Pakeliame abi nelygybės puses kvadratu ir gauname

$$\left|x^2 + 3x - 3\right|^2 \leq \left|x^2 - 2x - 2\right|^2,$$

$$(x^2 + 3x - 3)^2 \leq (x^2 - 2x - 2)^2,$$

$$((x^2 + 3x - 3) - (x^2 - 2x - 2))(x^2 + 3x - 3 + x^2 - 2x - 2) \leq 0,$$

$$(2x^2+x-5)(5x-1)\le 0.$$

Pastarosios nelygybės sprendinius randame intervalų metodu

$$x\le -\frac{1+\sqrt{41}}{4},\quad \frac{1}{5}\le x\le \frac{1+\sqrt{41}}{4}.$$

Išspręskime nelygybę su parametru $\log_{\frac{1}{x}}(a-x)<1$.

Apibrėžimo sritis $x>0,\ x<a,\ x\ne 1$. Iš apibrėžimo srities seka, kad kai $a<0$, nelygybė neturi sprendinių.

Todėl $a>0$.

Taikome 3' savybę :

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(a-x-\frac{1}{x}\right)<0 \text{ arba } \frac{(x-1)\left(x^2-ax+1\right)}{x^2}<0,$$

iš kur $(x-1)\left(x^2-ax+1\right)<0$. Kvadratinio trinario $y=x^2-ax+1$ diskriminantas $D=a^2-4$.Galimi trys atvejai

1) $D<0$, t.y. $a^2<4$, iš kur $0<a<2$, (nes $a>0$). Tada $y>0$ su bet kokiu x ir paskutinioji nelygybė ekvivalenti nelygybei $x-1<0$. Atsižvelgdami į apibrėžimo srities nelygybę $0<x<a$, gauname, kad jeigu $0<a<1$, tai $0<x<a$, jeigu $1<a<2$, tai $0<x<1$.

2) $D=0$, t.y. $a=2$, tada iš nelygybės $(x-1)\left(x^2-ax+1\right)<0$ gauname $(x-1)^3<0$, kurios sprendiniai $0<x<1$.

3) $D>0$, t.y. $a>2$, tada kvadratinis trinaris y turi realias šaknis $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ ir $x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$. Akivaizdu $0<x_1<x_2$ ir pagal Vijeto teoremą $x_1x_2=1$, todėl $x_1<1<x_2$ ir nelygybės $(x-1)\left(x^2-ax+1\right)<0$ sprendiniai tokie: $0<x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, $1<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

Ats.: $x\in(0;a)$, jei $a\in(0;1)$;

$x\in(0;1)$, jei $a\in[1;2]$;

$x\in\left(0;\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(1;\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$, jei $a\in(2;\infty)$.

Aišku, šis nelygybių sprendimo metodas ne visada priimtinas, bet supaprastina ir sutrumpina sprendimą. Sprendimo racionalizacija ugdo mokinių mąstymą. Sprendžiant šiuo metodu daroma mažiau klaidų.

LITERATŪRA

[1] A.Andžans, L.Eglite. Nestandarta uzdavini matematika. Riga, 1996.
[2] Шувалова Г.З. и др. Повторим математику. М., 1974.
[3] Цыпкин А.Г. и др. Справочник по методам решения задач по математике. М., 1989.

Usage of the interval method for solving some inequalities

P. Grebenečenkaitė

A method of intervals helps to solve complex inequality with parameter. This method makes it easier to solve inequality. This method is widely used. It develops the thinking of pupils