LMD mokslo darbai, 263–268
1998, Vilnius

Duoto ploto trikampių braižymas

I. Katinienė (VPU)

Mokykliniame geometrijos kurse nemažai vietos skiriama brėžimo uždaviniams. Mokiniai supažindinami su pagrindiniais tokių uždavinių sprendimo metodais: sankirtų, transformacijų ir algebriniu.

Šiame darbe nagrinėsime tik trikampių braižymo uždavinius. Parodysime, kaip galima sudaryti tokius uždavinius ir naudoti juos savarankiškam darbui matematikos būreliuose.

Tegul trikampį ABC apibrėžiantys elementai yra jo kampai A, B, C; kraštinės a, b, c; aukštinės h_a, h_b, h_c; pusiaukraštinės m_a, m_b, m_c; pusiaukampinės l_A, l_B, l_C; išoriškai įbrėžtų apskritimų spinduliai r_a, r_b, r_c; įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys r; apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulys R ir trikampio plotas S. Kiekvienam trikampiui nustatyti pakanka iš šios aibės parinkti bet kuriuos tris elementus, iš kurių bent vienas yra atkarpa. Apskaičiavus gauname, jog galima sudaryti 269 variantus skirtingų trikampį apibrėžiančių konstrukcijų. Juos suskirstome į klases pagal trikampį apibrėžiančių elementų kiekį ir rūšį. Pateikiame vieną iš galimų klasifikacijų:

1 klasė - du vienos rūšies elementai, o trečias skirtingas (A, B, a; A, B, c; A, B, h_a; A, B, h_c; ...; r_a, r_b, S). Klasę sudaro 78 variantai.

2 klasė - vienas kampas, viena kraštinė ir vienas elementas iš likusių skirtingos rūšies elementų (A, a, h_a; A, a, h_b; A, a, m_a; ...; A, b, S). Šioje klasėje yra 73 variantai.

3 klasė - viena kraštinė ir iš likusių skirtingų rūšių po vieną elementą (a, h_a, m_a; a, h_a, m_b; ...; a, R, S), sudaryta iš 51 varianto.

4 klasė - viena aukštinė ir iš likusių skirtingų rūšių po vieną elementą (h_a, m_a, l_A; h_a, m_a, l_B; h_a, m_a, r_a; ...; h_a, R, S). Šią klasę sudaro 33 variantai.

5 klasė - viena pusiaukraštinė ir iš likusių skirtingų rūšių po vieną elementą (m_a, l_A, r_a; m_a, l_A, r_b; ...; m_a, R, S). Šioje klasėje yra 19 variantų.

6 klasė - viena pusiaukampinė ir iš likusių skirtingų rūšių po vieną elementą (l_A, r_a, r; l_A, r_a, R; ...; l_A, R, S). Ši klasė sudaryta iš 9 variantų.

7 klasė - trys vienos rūšies elementai (a, b, c; l_A, l_B, l_C; ...; r_a, r_b, r_c). Tokios rūšies yra 6 variantai.

Tuos pačius 273 variantus galime suskirstyti į klases kitokiu būdu. Iš gautų klasių detaliau panagrinėkime tą klasę, kurią apibrėžia trikampio plotas ir dar du iš likusių elementų. Šią klasę sudarys 49 variantai, kuriuos galėsime suskirstyti į 7 grupes:

I) 1. S, A, a,
2. S, A, b,
3. S, A, h_a,
4. S, A, h_b,
5. S, A, m_a,
6. S, A, m_b,
7. S, A, l_A,
8. S, A, l_B,
9. S, A, r_a,
10. S, A, r_b,
11. S, A, r,
12. S, A, R.
II) 1. S, a, h_a,
2. S, a, h_b,
3. S, a, m_a,
4. S, a, m_b,
5. S, a, l_A,
6. S, a, l_B,
7. S, a, r_a,
8. S, a, r_b,
9. S, a, r,
10. S, a, R.
III) 1. S, h_a, m_a,
2. S, h_a, m_b,
3. S, h_a, l_A,
4. S, h_a, l_B,
5. S, h_a, r_a,
6. S, h_a, r_b,
7. S, h_a, r,
8. S, h_a, R.
IV) 1. S, m_a, l_A,
2. S, m_a, l_B,
3. S, m_a, r_a,
4. S, m_a, r_b,
5. S, m_a, r,
6. S, m_a, R.
V) 1. S, A, B,
2. S, a, b,
3. S, h_a, h_b,
4. S, m_a, m_b,
5. S, l_A, l_B,
6. S, r_a, r_b.
VI) 1. S, l_A, r_a,
2. S, l_A, r_b,
3. S, l_A, r,
4. S, l_A, R.
VII) 1. S, r_a, r,
2. S, r_a, R,
S, r, R.

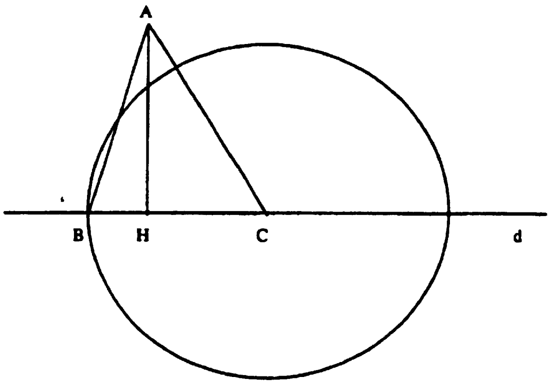
Atkreipsime dėmesį į tai, kad brėžimo uždavinių teorijoje svarbią vietą užima trikampių nubraižymo skriestuvu ir liniuote problema, t.y. ar visada minėtais įrankiais nubraižomas trikampis, apibrėžtas kokiais tai trimis savo elementais. Kadangi žinoma, jog atkarpa yra nubraižoma skriestuvu ir liniuote tada ir tik tada, kai jos ilgis išreiškiamas per žinomų atkarpų ilgius racionaliųjų operacijų ir kvadratinių šaknų pagalba, tai iš čia seka, kad galima minėtais įrankiais nubrėžti atkarpas, kurių ilgiai yra kvadratinių ir į jas suvedamų lygčių šaknys. Trečio ir ketvirto laipsnio lygčių šaknys, o tuo pačiu ir aukštesnio negu ketvirto laipsnio lygčių šaknys bendru atveju neišreiškiamos kvadratiniais radikalais, todėl atkarpos, kurių ilgiai yra minėtų lygčių šaknys, nenubraižomos skriestuvu ir liniuote.

Nagrinėjamoje uždavinių klasėje duotas trikampio plotas. Kadangi duotojo ploto S trikampiui visada galime nubraižyti jam lygiaplotį kvadratą, kurio kraštinė u, tai brėžiant atkarpas naudosimės sąlyga $S = u^2$. Kiekvieną brėžimo uždavinį galime spręsti visais žinomais metodais. Mes parodysime, kaip sprendžiami brėžimo uždaviniai kokiu nors vienu metodu. Išspręsime keletą pateiktos klasės uždavinių:

V) 3. *Nubraižysime trikampį ABC, žinant jo plotą S ir dvi aukštines h_a, h_b.*
Kadangi

$$a = \frac{2S}{h_a} = \frac{2u^2}{h_a}, \quad b = \frac{2S}{h_b} = \frac{2u^2}{h_b},$$

tai atkarpos a ir b nubrėžiamos. Vadinasi, trikampio ABC viršūnės B, C yra atkarpos a galai, o viršūnė A nutolusi nuo viršūnės C atstumu b (ji yra apskritime ω(C, b)). Viršūnė A yra tiesėje d, lygiagrečioje tiesei BC, ir nutolusioje nuo jos atstumu h_a. Taigi, viršūnė A yra apskritimo $\omega(C, b)$ ir tiesės d sankirtos taškas.



Pastaba. Šį uždavinį, kaip ir kitus, galime spręsti ir kitaip.

Suradus atkarpas a ir b, galime brėžti statų trikampį AHC ($AH = h_a$, $\angle H = 90^0$, $AC = b$). Tada tiesėje CH atidedame tašką B taip, kad CB = a ir gausime trikampio ABC viršūnes.

I) 2. *Nubraižysime trikampį ABC, žinant jo plotą S, kampą A ir kraštinę b.*

Kadangi

$$h_b = c \cdot \sin A, \qquad 2\,S = b \cdot h_b,$$

tai

$$c = \frac{2S}{b \sin A} = \frac{2u^2}{b \sin A},$$

ir trikampis ABC braižomas žinant kampą A, kraštines b ir c.

I) 7. *Nubraižysime trikampį ABC, žinant jo plotą S, kampą A ir pusiaukampinę l_A.*

Kadangi

$$2\,S = b \cdot c \cdot \sin A, \quad 2\,S = l_A\,(b + c)\sin\frac{A}{2}$$

ir

$$b \cdot c = \frac{2S}{\sin A}, \qquad b + c = \frac{2S}{l_A \sin\frac{A}{2}},$$

tai atkarpos b, c yra kvadratinės lygties

$$x^2 - \frac{2S}{l_A \sin\frac{A}{2}} x + \frac{2S}{\sin A} = 0$$

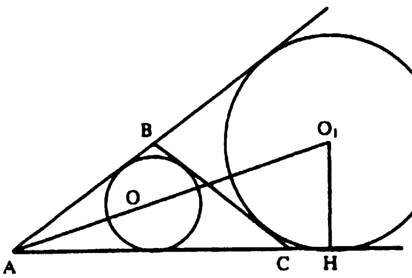
šaknys. Jos egzistuoja, kai

$$S \cos\frac{A}{2} - l_A^2 \sin^2\frac{A}{2} \geq 0$$

ir yra nubrėžiamos skriestuvu ir liniuote. Taigi, trikampį ABC braižysime, žinant jo kampą A, kraštines b ir c.

I) 9. *Nubraižysime trikampį ABC, žinant jo plotą S, kampą A ir išoriškai įbrėžto į trikampį apskritimo spindulį r_a.*

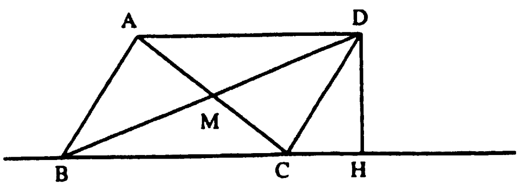
Tegul ieškomasis trikampis ABC nubraižytas.



Pastebime, jog statusis trikampis AO_1H nubraižomas, nes $O_1H = r_a$, $\angle O_1AH = \angle\frac{A}{2}$. Į trikampį ABC įbrėžkime apskritimą $\omega(O, r)$. Kadangi $AH = p$ (žinoma iš ΔAHO_1) ir $r = \frac{S}{p}$, tai į duotąjį kampą A galime įbrėžti apskritimą $\omega(O, r)$. Vadinasi, ieškomoji trikampio ABC kraštinė BC yra nubraižytųjų apskritimų $\omega(O, r)$ ir $\omega_1(O_1, r_a)$ bendra vidinė liestinė. Bendru atveju tokios liestinės yra dvi ir sprendiniai gali būti du.

II) 4. *Nubraižysime trikampį, žinant plotą S, kraštinę a ir pusiaukraštinę m_b.*

Tegul trikampis ABC nubraižytas, MB – jo pusiaukraštinė, taškas D yra simetriškas taškui B taško M atžvilgiu.



Tada keturkampis ABCD – lygiagretainis. Kadangi

$$2S = a h_a,$$

tai

$$h_a = \frac{2S}{a},$$

ir statusis trikampis BHD nubraižomas ($BD = 2\,m_b$, $DH = h_a$, $\angle H = 90^0$). Trikampio ABC viršūnė C yra tiesės BH ir apskritimo $\omega(B, a)$ sankirtos taškas.

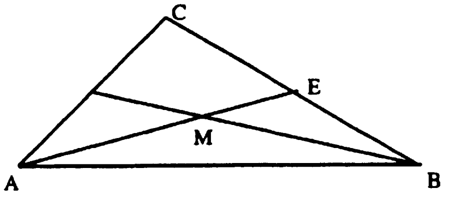
V) 4. *Nubraižysime trikampį ABC, žinant jo plotą S, dvi pusiaukraštines m_a ir m_b.*
Sudarysime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \\ 4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2, \\ 4m_b^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2. \end{cases}$$

Iš antros ir trečios lygčių suradus b^2, c^2, įstatome šias reikšmes į pirmą lygtį ir, nežinomos atkarpos a^2 atžvilgiu, gausime lygtį

$$\frac{9a^4}{4} - 4a^2(2m_b^2 - \frac{1}{2}m_a^2) + \frac{4}{9}m_a^4 + \frac{64}{9}m_b^4 - \frac{32}{9}m_a^2m_b^2 + S^2 = 0.$$

Ieškomoji atkarpa a yra nubrėžiama skriestuvu ir liniuote.



Dabar reikia nubraižyti trikampį ABC, žinant kraštinę a ir pusiaukraštines m_a, m_b. Braižome trikampį BEM ($BE = \frac{1}{2}a$, $EM = \frac{1}{3}m_a$, $BM = \frac{2}{3}m_b$), atidedame tiesėje ME tašką A, kad $EA = m_a$, o tiesėje EB – tašką C, kad $BE = EC$.

VII) 3. *Nubraižysime trikampį ABC, žinant jo plotą S, įbrėžto ir apibrėžto apskritimų spindulius r ir R.*

Sudarykime lygčių sistemą

$$\begin{cases} S = r \cdot p, \\ 4SR = abc, \\ a + b + c = 2p, \\ S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c). \end{cases}$$

Iš pirmųjų trijų lygčių gauname

$$p = \frac{S}{r}, \quad bc = \frac{4SR}{a}, \quad b+c = 2p - a.$$

Šias reikšmes įstačius į paskutiniąją lygtį, gausime:

$$a^3p^2 - 2p^3a^2 + (S^2 + p^4 + 4SRp)a - 4SRp^2 = 0.$$

Kadangi ši lygtis nežinomos atkarpos a atžvilgiu yra trečio laipsnio, tai tokia atkarpa a bendru atveju nenubrėžiama skriestuvu ir liniuote, ir toks trikampis ABC nenubraižomas minėtais įrankiais.

Išnagrinėję šios klasės variantus, gavome, kad 14 iš jų neišsprendžiami skriestuvu ir liniuote (I 8, II 6, III 3, III 4, IV 1, IV 2, IV 4, IV 5, IV 6, V 5, VI 2, VI 4, VII 2, VII 3).

Prie minėtų trikampį apibrėžiančių elementų prijungus perimetrą 2p, išorines pusiaukampines, įvairias tiesines kitų elementų kombinacijas galime gauti naujas uždavinių klases. Savarankiškas šių klasių tyrinėjimas lavina moksleivių loginį mąstymą, ugdo kūrybinę iniciatyvą.

LITERATŪRA

[1] Б.Л. Ван-дер-Варден, *Алгебра*, М., 1979.
[2] Б.И. Аргунов, М.Б. Балк, *Геометрические построения на плоскости*, Учпедгиз, 1957.
[3] И.И. Александров, *Сборник геометрических задач на построение*, М., 1954.

Duoto ploto trikampių braižymas

I. Katinienė

Šiame darbe nagrinėjamas trikampių konstruktyviosios geometrijos uždavinių sudarymas ir jų sprendimas. Detaliai ištirta klasė uždavinių: nubraižyti trikampį, žinant jo plotą ir dar du elementus. Nustatyta, jog 14 variantų tokių uždavinių neišsprendžiami skriestuvu ir liniuote.