

Adomo Jakšto vadovėlis “Plokštinė trigonometrija”

R.A. Lazauskienė (KTU)

Šiais metais sukanka 60 metų nuo Aleksandro Dambrausko – Adomo Jakšto (1860 09 08 – 1938 02 19) mirties ir 80 metų, kai du Lietuvos didžiavyriai Adomas Jakštas ir Pranas Mašiotas, visiškai nepriklausomai vienas nuo kito ir visai skirtingomis aplinkybėmis, parašė pirmuosius lietuviškus trigonometrijos vadovėlius.

Apie A. Jakšto matematikos darbus rašė daug autorių: P. Katilius, O. Stanaitis, Č. Masaitis, P. Rumšas, Vyt. Paulauskas, A. Ažubalis, J. Banionis, A. Baltrūnas, V. Pekarskas, R. Šlyžiūtė ir kt. Čia aptariamas tik vienas iš A. Jakšto vadovėlių “Plokštinė trigonometrija”, kuris parašytas 1918 metais, o išspausdintas E. Jagomasto spaustuvėje “Lituania”, Tilžėje 1920 m. Vadovėlis lyginamas su Pr. Mašiotų “Plokštumos trigonometrija” (Vilnius 1919 m.). Kreiptas dėmesys į terminus, turinį ir dėstymą.

1. “Trigonometrijos” vertinimai. Pirmieji vadovėlių recenzavo mokytojai – praktikai: L. Daukša ir J. Stoukus. Abu jie vadovėlių vertino trigonometrijos dėstymo praktikos požiūriu. L. Daukšos recenzija “Švietimo darbe” 1920 m. buvo švelnesnė negu J. Stoukaus, kuris tame pačiame žurnale 1921 m. labai neigiamai (kartais net nekorektiškai!) vertino A. Jakšto vadovėlį: “Šis vadovėlis visai netinka mokymo ir mokymosi reikalui. Vadovėlis susstatytas be tvarkos, apgraiabomis, kas ir kaip papuolė. Jokio gilumo nematyti. Išskyrus anas naujas sistemas, mažne viskas yra eiliniai dalykai. Viskas išdėstyta ne moksliškai, bet ir ne populiariškai”. A. Jakštas ne kartą atsakė abiem kritikams. Į L. Daukšos priekaištą, jog vadovėlis yra netinkamas gimnazijų mokiniams, A. Jakštas atsakė: “jose (gimnazijose) yra trigonometrijos mokytojų” (Š.D. 1921 m. Nr. 1–2, 126–128 p.), manydamas, jog mokytojų pareiga ir yra paaiškinti sunkesnes vadovėlio vietas. Atsakydamas J. Stoukui, A. Jakštas paaiškina vadovėlio parašymo aplinkybes: “Dėl prikišto vadovėlio nepaįdomumo pats savęs nei teisinsiu, nei teisiu. Nurodysiu tik faktą, jog vokiečių okupacijos metu, daugeliui mūsų pedagogų Rusijon išdūmus, teko dirbti ir ne pedagogams. Į tą darbą tapau pakviestas ir aš. Mūsų Mokslo Draugija, išleidusi 1916 m. mano pagamintą trumpą geometrijos vadovėlį, pasiūlė man pagaminti platesnį to mokslo vadovėlių gimnazijoms. Pabūgęs to didelio darbo, aš atsisakiau, pasiryždamas parašyti vien trigonometrijos vadovėlį. Tai įvykdžiau 1918 m. po vokiečių okupacijos. Vadovėlis spausdintas Tilžėj. Korektūros ėjo savaitėmis ir mėnesiais. Kai kurios žuvo. Taigi ir nenuostabu, kad jame randas nemaž spaudos klaidų. O kadangi 1918 m., kai šis vadovėlis rašyta, nebuvo da nei jokio lietuviško trigonometrijos vadovėlio, nei specialios to mokslo mūsų valdžios nustatytos programos, tai tvarkant dėstomų dalykų eilę, teko laikytis savo nuožiūros ir senos rusų programos”. (Š.D. 1921 m. Nr. 9–10, 153–158 p.).

Dalykiškai abi “Trigonometrijas” (A. Jakšto ir Pr. Mašiotų) kritikavo S. Antanaitis “Lietuvos mokykloje” 1934 m. ir 1935 m. Jis pagrįstai nurodo, jog abi “Trigonometrijos” neracionaliai išveda pusės trikampio kampo tangento formulę. Be to, pagiria A. Jakštą už paprastesnį redukcijos formulį išvedimą [3, 275 p.].

Po A. Jakšto mirties (1938 02 19) tais pačiais metais parašyti bent keturi straipsniai apie A. Jakšto matematiškus darbus: P. Katilius „Kosmose“, O. Stanaitis „Židinyje“, Č. Masaitis „Naujojoje Romuvoje“ ir J.Žg. (Juozas Žiugžda?) „Lietuvos Aide“. P. Katilius rašo: *“Reikia paminėti dar prel. Dambrausko <...> vadovėlius. Visų pirma yra visiškai originalus trigonometrijos vadovėlis: “Plokštinė trigonometrija”, kuris tikrai atrodo rašytas trigonometrijos specialisto <...>. Tiesa, šie vadovėlia nėra prigiję mūsų mokyklose, bet kaip pirmieji šios rūšies veikalai mūsų kalba savo paskirtį yra atlikę”*.

O. Stanaitis tikisi, jog *“<...> Lietuvos matematikams jis (Adomas Jakštas) liks sektinas darbo pavyzdys, o Lietuvos matematikos istorija jo nuopelnus, be abejo, daug daugiau įvertins”*.

Sovietų okupacijos metais P. Rumšas rašė apie A. Jakšto „Trigonometriją“ 1973 m. „Lietuvos matematikos rinkinyje“ Nr.2 (rusų kalba!). P. Rumšas atkreipia dėmesį į vadovėlio aukštosios matematikos elementus, nors ir formaliai įvestus: trigonometrinių ir jų atvirkštinių funkcijų eilutes, begalines sandaugas, Wallis'o ir Euler'io formules. P. Rumšo manymu, aukštosios matematikos elementai, nors ir neįeina į gimnazijos matematikos kursą, netrukdo iš to vadovėlio mokytis trigonometrijos. Tam tikrais atžvilgiais P. Rumšas labiau vertina A. Jakšto vadovėlį negu Pr. Mašiotą. Pz. trigonometrinės funkcijas A. Jakštas giliau išdėsto negu Pr. Mašiotas. Iš tikrųjų, A. Jakštas funkcijos sąvoką laiko trigonometrijos pagrindu ir iš karto įveda simbolius $f(x)$, $f(x, y)$ ir kt.: *“<...> trigonometrija yra visiškai atskira matematikos šaka, turinti savų originalių idėjų <...>. Žymiausią vietą tarp tų idėjų, užima trigonometrijos moksle augščiausiai išdėstytoji funkcijos idėja”*. [1, 14 p.]. Šia proga tenka nesutikti su A. Ažubaliu, kuris [3, 268 p.] rašo: *“A. Jakštas pirmasis lietuvių mokomojoje matematinėje literatūroje įvedė funkcijos sąvoką”, o 510 p. teigia: “Pirmasis drąsiai funkcijos sąvoką pavartojo savo trigonometrijos vadovėlyje A. Jakštas – Dambrauskas”*. Ir A. Jakštas, ir Pr. Mašiotas savo trigonometrijos vadovėlius rašė 1918 metais: pirmasis – Lietuvos Mokslo Draugijai pavedus, o antrasis – J. Jablonskio paskatintas: *“Voroneže, karui baigiantis, iš <...> Jablonskio gavau įtikinamą patarimą imtis rašyti vadovėlių aukštesniajai mokyklai. “Trigonometrijos” pradžią jau galėjau skaityti jam vagone, keliaujant iš Voronežo į Vilnių. Vilnių tą vadovėlį baigiau”*. [3, 267 p.]. Ten pat A. Ažubalis teigia: *“Trigonometrijos vadovėlius vienu metu nepriklausomai vienas nuo kito išleido du autoriai: A. Jakštas – Dambrauskas ir P. Mašiotas”*. Prisiminkime, jog Pr. Mašiotas savąjį vadovėlį atspausdino 1919 m., o Jakštas – 1920 m.! (Tai įrodo A. Jakšto „Trigonometrijos“ viršelio data – 1920). Visiškai sutinkame su P. Rumšu, jog A. Jakšto funkcijos sąvoka yra gilesnė, bet neskriausime ir Pr. Mašiotą... Abu mūsų didžiavyriai verti pagarbos, nei vienam nepriskirkime pirmumo teisės.

Prasidėjus Lietuvos atgimimui, pirmasis apie A. Jakštą parašė Vytautas Paulauskas „Adomas Jakštas – matematikas (‘Mokslas ir Gyvenimas’, 1988 m. Nr.9, 28–29 p.). Šis puikus straipsnis skirtas A. Jakšto 50–ųjų mirties metinių paminėjimui. Jame labai vertinamos A. Jakšto naujosios trigonometriškos sistemos.

Po Vyt. Paulausko prabilo A. Ažubalis (1990, 1993 ir 1997 m. Ypač puiki pastaroji knyga [3] – ją galime vadinti matematikos mokymo lietuviškoje mokykloje enciklopedija – joje A. Jakšto matematiški darbai labai gerai nušviesti). Apie A. Jakštą – matematiką Lietuvos trečiosios Nepriklausomybės laikais dar rašė J. Banionis, V. Pekarskas, R. Slyžiūtė, A. Baltrušas ir kiti.

2. Vadovėlio terminai ir kalba. Apie juos autorius užsimena prakalboje: „Ką dėl trigonometriškosios terminologijos, tai negalėdamas pripažinti p. Šikšnio „Liet. Mokykloje“ 11-me n-je 1918 m. paduotosios tinkama, aš laikiausi savos imdamas ją, kur buvo galima, iš savo „Pradedamojo Geometrijos vadovėlio“, išleisto Liet. Mokslo Draugijos 1916 metais [1, 5 p.]. To vadovėlio žodynyje yra 102 geometrijos terminai. Apie 50 – dar ir šiandien tebevartojami. Trigonometrijos vadovėlyje suskaičiavome apie 230 matematikos terminų: trigonometrijos – 50, aukštosios matematikos – 30, geometrijos – 90 ir algebros – 60 terminų. Apie A. Jakšto terminus rašė daugelis autorių. Pacituosime tik P. Rumšą, kuris straipsnyje „Lietuviškų geometrijos terminų istorija“ [“Mūsų kalba”, 1974 – 2, 17p.] daro išvadą: „dėl savo ambicingumo Jakštas mūsų matematikos terminų istorijoje suvaidino ne visai teigiamą vaidmenį“.

Čia atkreipsime dėmesį į tris dalykus.

1) A. Jakštas labai mėgo sąvoką *gvildenti* (=spręsti) uždavinį. DLK žodyne skaitome: *gvildenti*, 2 prk. nagrinėti, tyrinėti: *gvildenti klausimą, uždavinį, problemą*. Taigi, autoriaus aukštaitišką terminą dar ir šiandien gyvas, juo labiau, kad turime pavardę Gvildys!

Kaip žinome, Pranas Mašiotas ir Jonas Jablonskis buvo suvalkiečiai, todėl ir nenuostabu, kad dabar jų terminai mums atrodo įprastesni. Pr. Mašiotas „Trigonometrijos“ kalba yra labai gera. Ketvirtajame (1936 m.) savo vadovėlio leidime Pr. Mašiotas ištaisęs paragrafus paliko tokius pačius kaip ir pirmosios (1919 m.) laidos, tik pridėjo papildymus, pvz. § 14, 14a, 14b. Taisymai – labai nedideli, nors kai kurie ir „nutaisyti“: *plokštuma* pakeista *plokšme* (todėl ir „Plokšminė trigonometrija“), *ketvirtis* – *kvadrantu* ir kt.

2) A. Jakštas labai gerai aiškina terminų (*trigonometrija*, *goniometrija*, *sinas*, *kosinas*, *tangensas* ir kt.) kilmę [1; 7, 13, 25 p.]. Įdomu, jog *sinuso* kilmę abu autoriai aiškina skirtingai: Pr. Mašiotas – indų *džiba* virto arabų *džaiḥ* (pažastis), o lotynai *pažastį* išvertė žodžiu *sinus*, todėl – *sinusas* [2; „Kai kas iš trigonometrijos istorijos“], gi A. Jakšto – *sinusinė* (ją pratęsus iki apskritimo) yra pusė stygos, lotyniškai *semi recta inscripta* (pažodžiui – *pusė statmenos įbrėžtos*), trumpiau – *semi inscripta*, dar trumpiau *s.ins*, suliejus – *sins* ir galop *sinus*. Todėl aišku, kodėl A. Jakštas pasirinko *sinas* sąvoką [1; 25 p.], [3; 269 p.].

3) Kai kurie A. Jakšto siūlyti, bet neprigiję terminai, mūsų manymu, yra visai geri: *sankampis* – papildomas kampas, *lankų dauginimas ir dalymas* – α , $m\alpha$, $\frac{\alpha}{m}$, *puskampis* – pusė kampo, *likos skaičius* – nelyginis skaičius (DLK žodyne: lykinis – nelyginis, lieka – likti, lykis – likutis), ir kt.

3. Vadovėlio turinys ir dėstymas. A. Jakštas „Trigonometrijos“ prakalboje rašo: <...> vadovėliai baigias paprastai trikampių gvaldymo mokslu<...> praktiška trigonometrijos kurso dalimi. Aš gi tariaus, busiant neprošalį pridurus dar ir trečiąją dalį, paduodančią gilesnį <...> išaiškinimą <...>. Kaip trigonometrijos funkcijos rutuliojama nesibaigiamomis eibėmis bei nesibaigiamais padaugais <...>. Galop pabaigoj pridėjau keletą žodžių ir apie savo naujų trigonometriškų sistemų genezę ir jų svarbumą mokslui <...>, kad skaitytojas <...> žinotu ne tik paskutinį to mokslo žodį, bet ir kelią, vedantį į naujas, dar neištirtas trigonometrijos sritis. Tie nurodymai skiriama vien mokytojams ir gabesniems mokiniamis“. [1; 5p.]. Taigi A. Jakštas prie trigonometrinių funkcijų

(goniometrijos – pirmosios dalies) ir trikampių "gvaldymo" (trigonometrijos – antrosios dalies), sekdamas Davidov'u (1877 m. vadovėlis) ir Niewęglowski'u (1870 m.), prideda dar ir aukštosios matematikos žinių, o, svarbiausia, supratimą apie savo paties matematikos tyrinėjimus (vadovėlio trečioji dalis). Ši savybė A. Jakštą išskiria iš visų kitų lietuviškų vadovėlių autorių!

Pabrėžtina, jog A. Jakštas jau įžangoje įveda funkcijos sąvoką. Autoriui ji yra esminė ne tik trigonometrijos, bet ir savaranki sąvoka: "... *į trigonometriškas funkcijas galima žiūrėti ne vien tik kaip į specialius pagalbinius įnagius trikampiams gvaldyti, bet ir kaip į savitas matematiškas kreacijas, turinčias labai įdomių, protą stebinančių ypatybių su begaliniai plačiomis pritaikymo ribomis* [1; 13 p.].

Pranas Mašiotas, pedagogas, pats dėstęs trigonometriją, elgiasi visai kitaip. Jis žiūri praktiškai. Vadovėlis skirtas mokiniui, – pastarasis beveik viską turi ir gali suprasti pats. Jo funkcijos sąvoka, nors ir įvedama vadovėlio pačioje pradžioje, nepersmelkia viso vadovėlio, kaip kad daro A. Jakštas. Taigi A. Jakštas funkcijos sąvoką išdėsto giliau negu Pr. Mašiotas. Iš kitos pusės, žiūrint vien tik vadovėlio paskirties ir dėstymo metodikos, Pr. Mašiotas "Plokštumos trigonometrija" (1919 m.) yra vienas geriausių to meto vadovėlių. Ši teiginį patvirtina vadovėlio keturios laidos (1919–1936 m.), iš kurių paskutinėje funkcijos sąvoką išplėtė Prano Mašiotas sūnus Jonas Mašiotas.

A. Jakštas grakščiai įrodo *dėstymo teoremą sinams* – $\sin(\alpha + \beta)$. Jis remiasi trikampio ploto formule. Vėliau ją apibendrina. Analogišką teoremą kosinusams išveda remdamasis trigonometrinių funkcijų savybėmis. Pr. Mašiotas abiem atvejais remiasi gana sudėtingu brėžiniu ir nesinaudoja trigonometrinių funkcijų savybėmis.

Redukcijos formules abu autoriai išveda irgi skirtingai. A. Jakštas remiasi trigonometrinėmis linijomis ir trig. funkcijų savybėmis. Dėstymas glaustas, įdomus, aiškus. Pr. Mašiotas – visus atvejus (24!) įrodo vienu būdu: trikampių lygybe ir šešiais gan sudėtingais brėžiniais. Dėstymas nuobodokas, bet – vienas būdas. Teikiame pirmenybę A. Jakšto pasirinktam įrodymo būdui!

Abu autoriai tiria trigonometrinių lygčių šaknų praradimą ir pašalinių šaknų atsiradimą.

Pateiksime keletą įdomesnių A. Jakšto aukštosios matematikos sąvokų bei teoremų.

1) Remdamasis Niutono ir Muavro (ją įrodo!) formulėmis išveda $\sin mx$ ir $\cos mx$ formules; iš jų gauna $\sin x$ ir $\cos x$ eilutes. Be abejo, visos sąvokos, įskaitant ir ribos sąvoką, yra intuityvios, ne griežtos.

2) $\arctg x$ eilutė

Taria, jog $\arctg x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$, (1)

$$\arctg y = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \dots$$

Skaičiuoja

$$\frac{\arctg x - \arctg y}{x - y} = a + b(x + y) + c(x^2 + xy + y^2) + d(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \dots \quad (2)$$

Remdamasis $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, įrodo, jog (2) reiškinio kairioji pusė artėja prie

$$\frac{1}{1 + x^2}, \text{ kai } y \rightarrow x. \text{ Iš algebras}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (3)$$

Imdamas (2) lygybės dešinę pusę $x = y$ ir sulyginęs su (3), randa $a, b, c, d, \dots$. Įstatęs $a, b, \dots$ į (1), gauna eilutę: $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$.

Toliau tiria įvairius šios eilutės atvejus ir taiko apytiksliams skaičiavimams.

3) Wallis'o formulė. Tiria lygties $\sin x = 0$ šaknis $x = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Iš analogijos su algebriniais daugianariais rašo:

$$\sin x = a(x-0)(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\dots = ax(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)\dots \quad (1)$$

Dalina iš x ir nagrinėja $\frac{\sin x}{x}$. Iš čia, kai $x \rightarrow 0$, gauna

$$1 = a(-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2)\dots \quad (2)$$

Dalydamas (1) iš (2), randa

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \quad (3)$$

Kai $x = \frac{\pi}{2}$, iš (3) gauna

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots (2k) \cdot (2k) \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2k-1) \cdot (2k+1) \dots}$$

4) Skaičiumi e vadina ribą $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n=\infty}$.

Nagrinėja $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Niutono binomą ir jo ribą, kai $n \rightarrow \infty$. Gauna

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Analogiškai, iš $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$ išveda e^x eilutę. Joje vietoj x įrašo ix ir, pasinaudojęs $\sin x$ ir $\cos x$ eilutėmis, išveda Euler'io formulę

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

o vėliau $\sin x$ ir $\cos x$ išreiškia rodiklinėmis funkcijomis. Galiausiai išveda formulę

$$\pi = \frac{2}{i} \ln i.$$

4. Išvados. 1) Kai kurie pirmieji A. Jakšto "Plokštinės trigonometrijos" recenzentai labai daug dėmesio skyrė vadovėlio neigiamybių kritikai, bet neišskėlė ir neįvertino visų vadovėlio teigiamybių: vadovėlio turiningumo, mokslingumo bei paties autoriaus indėlio į trigonometrijos mokslą.

2) Pr. Mašiotas ir A. Jakštas – lietuviškų vadovėlių autoriai, kurie pirmieji įdiegė funkcijos sąvoką savo vadovėliuose. A. Jakšto funkcijos supratimas buvo gilesnis negu Pr. Mašiotas.

3) Tenka tik apgailestauti, jog A. Jakštas netobulino savo vadovėlio, neleido kitų vadovėlio laidų, nederino savo terminijos su kitais autoriais. Vis dėlto reikia pasidžiaugti, jog lietuviai pedagogai net ir labai sunkiomis ano meto sąlygomis nesutriko, o paruošė ir išleido du gerus trigonometrijos vadovėlius.

LITERATŪRA

- [1] "Plokštinė trigonometrija". Pilnas sistematiškas kursas. Teorija ir uždaviniai. Sustatė A. Jakštas. Kaunas 1919 (viršelyje: 1920).
- [2] Pr. Mašiotas "Plokštumos trigonometrija". Vadovėlis vidurinei mokyklai. Vilnius 1919.
- [3] A. Ažubalis. "Matematika lietuviškoje mokykloje". Vilnius 1997.

Adomas Jakštas textbook "Plokštinė trigonometrija"

R. Lazauskienė

The famous Lithuanian poet and priest Aleksandras Dambrauskas – Adomas Jakštas died sixty years ago. He was highly interested in mathematics. Aleksandras Dambrauskas wrote a few scientific articles on mathematics. Here we present some comments concerning his mathematical textbook "Plokštinė trigonometrija" for gymnasium (published in 1920). It is one of the very first two textbooks on trigonometry which appeared at that time. We discuss and analyse mathematical terms and topics, presented in this textbook, and emphasize their significance for nowadays pedagogical science.