LMD mokslo darbai, 345–348
1998, Vilnius

Netiesinės stochastinių maksimumų struktūros

A. Aksomaitis, R. Vilkas (KTU)

Įvadas

Tarkime, kad

$$(X_1, X_2, \dots, X_N) \text{ ir } (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$$

yra dvi paprastosios atsitiktinės imtys ir tolygiosios intervale (0,1) generalinės aibės. Atsitiktiniai dydžiai $X_j, Y_j, j \geq 1$ ir atsitiktinis imties tūris $N = N_n$ yra nepriklausomi.

Apibrėžę stochastinius maksimumus

$$Z_N^1 = \max(X_1, \dots X_N), \; Z_N^2 = \max(Y_1, \dots Y_N),$$

sudarome dvi netiesines struktūras:

$$U_N = Z_N^1 \cdot Z_N^2 \text{ ir } V_N = Z_N^1 / Z_N^2 .$$

Tirsime šių struktūrų asimptotinį elgesį, kai $n \to \infty$. Tokių uždavinių sprendimai aktualūs statistikoje, konstrukcijų patikimumo analizėje, eilių teorijoje. Atskiri atvejai, kai $P(N_n = n) = 1$, nagrinėjami [1],[2] darbuose. Atvejai, kai $X_j \sim T(0,1)$ ir $Y_j \sim T(0,1)$ yra svarbūs tuo požiūriu, jog kitus tolydžiuosius dydžius ζ galima išreikšti tolygiaisiais: $F_\zeta(\zeta) \sim T(0,1)$.

Teoremų formuluotė

Tarkime, kad imties tūrio skirstinys yra geometrinis:

$$P(N_n = k) = p_n (1 - p_n)^{k-1}, k \geq 1.$$

1 TEOREMA. *Jeigu* $X_j \sim T(0,1)$, $Y_j \sim T(0,1)$ *su visais* $j \geq 1$ ir $p_n = 1/n$, *tai*

$$\lim_{n \to \infty} P(U_N < x\sigma_n + m_n) = 1 - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2, x \leq 0.$$

Čia normavimo konstantos $m_n = 1, \sigma_n = 1/n$.

2 TEOREMA. *Jeigu* $X_j \sim T(0,1)$, $Y_j \sim T(0,1)$ *su visais* $j \geq 1$ ir $p_n = \frac{1}{n}$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(V_N < x\sigma_n + m_n\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)}, & x \leq 0, \\ 1 - \dfrac{1}{2(1+x)}, & x > 0. \end{cases}$$

Čia $m_n = 1$, $\sigma_n = \frac{1}{n}$.

Pastabos.

1. Normavimo konstantas galima parinkti ne vieninteliu būdu ir gauti tuos pačius arba skirtingus neišsigimusius ribinius skirstinius.
2. Mes abiejose teoremose imame tas pačias normavimo konstantas.

Teoremų įrodymas.

Abi teoremos įrodomos tiesioginiu metodu.

1 *teoremos įrodymas*. Atsitiktinių dydžių Z_n^1 ir Z_n^2 tikimybių tankiai

$$p_{z_n^1}(x) = p_{z_n^2}(x) = nF^{n-1}(x)p(x) = nx^{n-1}, 0 < x < 1.$$

Čia $F(x) = P\left(X_j < x\right) = P\left(Y_j < x\right)$, $j \geq 1$.

Panaudoję gerai žinomą sąryšį

$$p_{X\cdot Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(t) p_Y\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{1}{|t|} dt,$$

gauname

$$p_{u_n}(x) = n^2 \int_x^1 t^{n-1}\left(\frac{x}{t}\right)^{n-1} \frac{1}{t}\, dt = -n^2 x^{n-1} \ln x.$$

Tikimybių pasiskirstymo funkcija

$$P\left(U_n < x\right) = -n^2 \int_0^x t^{n-1} \ln t dt = x^n\left(1 - \ln x^n\right), 0 < x < 1.$$

Parinkę normavimo konstantas $m_n = 1, \sigma_n = \frac{1}{n}$, gauname:

$$P\left(U_n < x\sigma_n + m_n\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right), \tag{1}$$

kai $-n<x<0$.

Pasinaudoję pilnosios tikimybės formule, skaičiuojame U_N pasiskirstymo funkciją:

$$P(U_N < x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \left(1 - \ln x^k\right) p_n (1 - p_n)^{k-1}$$
$$= x p_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(x(1 - p_n)\right)^{k-1} - \ln x \sum_{k=1}^{\infty} k \left(x(1 - p_n)\right)^{k-1} \right)$$
$$= \frac{p_n x}{1 - (1 - p_n)x} \left(1 - \frac{\ln x}{1 - (1 - p_n)x} \right), 0 < x < 1.$$

Iš čia

$$P(U_N < x\sigma_n + m_n) = \frac{\frac{1}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \left(1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \right),$$

kai $-n<x<0$.

Skaičiuodami ribą, kai $n \to \infty$, gauname teoremos teiginį.

2 *teoremos įrodymas*. Įrodymo metodika – pirmosios teoremos įrodymas. Pažymėsime pagrindinius sąryšius.

$$P(V_n < x) = n^2 \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(ty)F(y)\right)^{n-1} p(ty)p(y)|y| dy dt = n^2 \int_0^x (ty \cdot y)^{n-1} y dy dt = \frac{x^n}{2}, \quad 0 < x < 1,$$

$$P(V_n < x) = n^2 \left(\int_0^1 \int_0^1 (ty \cdot y)^{n-1} y dy dt + \int_1^x \int_0^{1/t} (ty \cdot y)^{n-1} y dy dt \right) = 1 - \frac{1}{2x^n}, \quad x \geq 1.$$

$$P(V_n < x\sigma_n + m_n) = \begin{cases} 0, & x \leq -n, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, & -n < x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}, & x > 0. \end{cases}$$
$$P(V_N < x\sigma_n + m_n) = \begin{cases} 0, & x \leq -n, \\ \dfrac{1 + \frac{x}{n}}{2\left(1 + \frac{x}{n} - x\right)}, & -n < x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}(1 + x)^{-1}, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Skaičiuodami ribą, kai $n \to \infty$, gauname teoremos teiginį.

Pastaba. Iš (1) ir (2) sąryšių išplaukia ribinės teoremos neatsitiktiniam komponentų skaičiui $\left(P(N_n = n) = 1\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} P(U_n < x\sigma_n + m_n) = (1 - x)e^x, x \le 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} P(V_n < x\sigma_n + m_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, x > 0. \end{cases}$$

Toliau natūralu tirti konvergavimo greičius šiose ribinėse teoremose.

LITERATŪRA

[1] Тихов М.С. Статистический анализ моделей высот интенсивных внутренних волн. Обозрение прикладной и промышленной математики. Т.4, вып. 3 "ТВП" Москва, 1997, с. 412–414.

[2] Polinovsky E.N., Tikhov M.S., Kiyashko O.S. Prognosis of lакge – amplitude internal waves an base a probability laws.– In: *Proceedings of the Sydney International Statistical Congress*. Sydney, 1996, p. 76.

Nonlinear structures of the stochastic maxima

A. Aksomaitis, R. Vilkas

In the report there is presented the asymptotic analysis of the product and ratio of the maxima.