LMD konf. darbai, 379–383
1998, Vilnius

Netiesinės optikos uždavinio lygiagretusis sprendimo algoritmas

R. Čiegis (MII, VGTU), G. Kairytė (MII), P. Ratė (VDU)

1. Įžanga

Netiesinėje optikoje matematiniai modeliai aprašomi diferencialinių lygčių sistemomis, kurios yra netiesinės, ir sprendžiami uždaviniai yra daugiamačiai. Netiesinių diferencialinių lygčių sistemos paprastai neturi analizinio sprendinio, todėl praktikoje jos sprendžiamos skaitmeniškai. Tokio tipo uždavinių skaitmeninis sprendimas reikalauja ypatingai didelių apimčių skaičiavimų bei didelių kompiuterinio laiko sąnaudų. Norint gauti reikiamo tikslumo rezultatus, reikia naudotis pakankamai tankiu skaičiavimo tinkleliu, dėl ko skaičiavimo apimtys dar padidėja.

Vienas iš būdų greičiau ir efektyviau spręsti šios klasės uždavinius - naudoti lygiagrečiuosius algoritmus.

2. Uždavinio formulavimas

Sprendžiame uždavinį apie fokusuotų lazerio spindulių sąveiką netiesinėje aplinkoje. Jis aprašomas tokiomis lygtimis:

$$\frac{\partial e_L}{\partial t}+\frac{\partial e_L}{\partial z}-i\,\mu_L\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial e_L}{\partial r}\right)+\frac{\alpha_L}{2}e_L=-\Gamma_L\,\sigma_S e_S+i\,\eta_L\left(\left|e_L\right|^2+2\left|e_S\right|^2\right)e_L, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial e_S}{\partial t}-\frac{\partial e_S}{\partial z}-i\mu_S\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial e_S}{\partial r}\right)+\frac{\alpha_S}{2}e_S=-\Gamma_S\sigma_S^{*}e_L+i\eta_S\left(2\left|e_L\right|^2+\left|e_S\right|^2\right)e_S, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \sigma_S}{\partial t}+a\,\sigma_S=\Gamma_\sigma e_L e_S^{*}, \tag{1.3}$$

kur $e_{L,S}$, σ_S yra lazerio, Stokso ir hipergarso bangų kompleksinės amplitudės (atitinkamai), z, t, r yra bedimensinės koordinatės, $\mu_{L,S}=1/(2k_{L,S})$, $k_{L,S}$ yra bangos vektoriaus moduliai, Γ_L, Γ_S, Γ_σ yra netiesinės sąveikos koeficientai, $\alpha_{L,S}$ yra lazerio ir Stokso bangos absorbcijos koeficientai, $\eta_{L,S}$ yra netiesiniai refrakciniai indeksai.

Kraštinės sąlygos apibrėžiamos ant srities $(0\le z\le L)\times(0\le r\le R)$ krašto:

$$e_L(0,r,t)=e_L^1(r,t)\,,\qquad e_S(L,r,t)=e_S^1(r,t), \tag{1.4}$$

$$e_L(z,R,t)=0,\qquad e_S(z,R,t)=0, \tag{1.5}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}e_L(z,0,t)=0, \quad r\frac{\partial}{\partial r}e_S(z,0,t)=0. \tag{1.6}$$

Pradinės sąlygos duotos momentu $t = 0$:

$$e_L(z,r,0)=e_L^0(z,r), \quad e_S(z,r,0)=e_S^0(z,r), \tag{1.7}$$

$$\sigma_S(z,r,0)=\sigma_S^0(z,r). \tag{1.8}$$

3. Baigtinių skirtumų schema

Diferencialinių lygčių sistemą (1.1)-(1.8) spręsime baigtinių skirtumų metodu.

3.1. Diskrečiojo tinklo apibrėžimas. Apibrėžkime tolygų diskretųjį tinklą intervale $[0,T]$

$$\overline{\omega}_t=\left\{t_n=n\tau,\quad n=0,1,\ldots,K,\quad t_K=T\right\}. \tag{2.1}$$

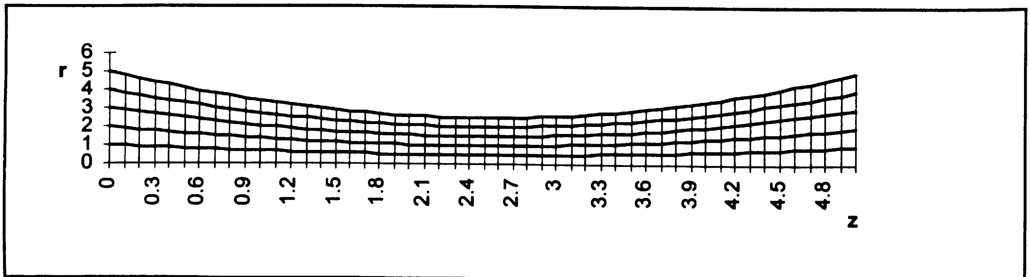
Apibrėžkime adaptyvų diskretųjį tinklą intervale $[0,R]$

$$\overline{\omega}_r\left(z_j\right)=\left\{r_k=kh_j, k=0,1,\ldots,N,\quad r_N=R\left(\left(1-\frac{z_j}{f}\right)^2+\left(\frac{z_j}{Z_R}\right)^2\right)\right\}, \tag{2.2}$$

kur f yra linzės fokusas, $Z_R=\frac{k\omega_0}{2}$, ω_0 yra pradinio signalo plotis.

Apibrėžkime tolygų diskretųjį tinklą intervale $[0,L]$

$$\overline{\omega}_Z=\left\{z_j=j\tau, j=0,1,\ldots,M,\quad z_M=L\right\}. \tag{2.3}$$



Pav. 1. $\omega_r \times \omega_z$ diskrečiojo tinklo pavyzdys.

3.2. Diskrečiosios schemos žymėjimai. Ieškomųjų funkcijų e_L ir e_S diskrečiuosius artinius žymėkime funkcijomis u ir v, kurios apibrėžtos srities $\omega_t \times \omega_z \times \omega_r$ taškuose. Sutrumpintai žymėkime funkcijų reikšmes:

$$u=u\left(z_j,r_k,t_n\right), \qquad v=v\left(z_j,r_k,t_n\right),$$

$$u(-1)=u\left(z_{j-1},r_k,t_n\right), \qquad v(-1)=v\left(z_{j-1},r_k,t_n\right),$$

$$\hat{u} = u\left(z_j, r_k, t_{n+1}\right), \qquad \hat{v} = v\left(z_j, r_k, t_{n+1}\right).$$

Funkcijos σ_S diskretusis artinys σ yra apibrėžtas srities $\omega_t \times \tilde{\omega}_z \times \omega_r$ taškuose:

$$\tilde{\omega}_Z = \left\{z_{j-1/2} = j\tau, j = 1,2,\ldots, M, \quad z_M = L\right\}.$$

3.3. Baigtinių skirtumų schema. Uždaviniui (1.1)–(1.8) spręsti panaudota baigtinių skirtumų schema, kurią sudarome skaidymo pagal fizikinius procesus metodu.

3.3.1 Pirmas skaidymo žingsnis: difrakcija.

$$\frac{\tilde{u} - u(-1)}{\tau} - i\mu_L \Lambda \frac{\tilde{u} + u(-1)}{2} + \frac{\alpha_Z}{2} \cdot \frac{\tilde{u} + u(-1)}{2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\hat{v}(-1) - \tilde{v}}{\tau} - i\mu_S \Lambda \frac{\hat{v}(-1) + \tilde{v}}{2} + \frac{\alpha_S}{2} \cdot \frac{\hat{v}(-1) + \tilde{v}}{2} = 0. \tag{3.2}$$

Šiame žingsnyje atvaizduojame funkcijas u ir v baigtiniais skleidiniais:

$$u(-1) = \sum_{l=1}^{P} C_l\left(Z_{j-1}, t_n\right) L_l\left(Z_{j-1}, r_k\right), \qquad r_k \in \omega_r\left(Z_{j-1}\right), \tag{3.3}$$

kur L_l yra Lagero – Gauso funkcijos, kurių bazinė aibė L_P yra pilna ir ortogonali.

$$C_l\left(Z_j, t_{n+1}\right) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}\alpha_Z}{1 + \frac{\tau}{2}\alpha_Z} C\left(Z_{j-1}, t_n\right), \tag{3.4}$$

$$\tilde{u} = \sum_{l=1}^{P} C_l\left(Z_j, t_{n+1}\right) L_l\left(Z_j, r_k\right), \quad r_k \in \omega_r\left(Z_j\right). \tag{3.5}$$

3.3.2 Antras skaidymo žingsnis: netiesinė sąveika. Apskaičiuojame garso bangos prediktorių σ^P:

$$\frac{\sigma^P - \sigma}{\tau} + a\frac{\sigma^P + \sigma}{2} = \Gamma_\sigma \frac{u + u(-1)}{2} \cdot \frac{v^* + v^*(-1)}{2}, \tag{3.6}$$

aproksimuojame lazerio ir Stokso bangų netiesinę sąveiką

$$\begin{cases} \dfrac{\mathring{u} - u}{\tau} = -\Gamma_L \dfrac{\sigma^P + \sigma}{2} \dfrac{\mathring{v} + v}{2}, \\[2ex] \dfrac{\mathring{v} - v}{\tau} = -\Gamma_S \left(\dfrac{\sigma^P + \sigma}{2}\right)^* \dfrac{\mathring{u} + \tilde{u}}{2}, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} + a\frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} = \Gamma_\sigma \frac{\mathring{u} + \tilde{u}}{2} \frac{\mathring{v}^* + v^*}{2}. \tag{3.8}$$

3.3.3 Trečias skaidymo žingsnis: netiesinis savaiminis susifokusavimas.

$$\hat{u} = \exp(i\eta_L(|\overset{\circ}{u}|^2 + 2|\overset{\circ}{v}|^2)\tau)\overset{\circ}{u}, \qquad (3.9)$$

$$\tilde{v} = \exp(i\eta_S(2|\hat{u}|^2 + |\overset{\circ}{v}|^2)\tau)\overset{\circ}{v}. \qquad (3.10)$$

3.3.4 Baigtinių skirtumų schemos realizavimas. Baigtinių skirtumų schema (3.1)–(3.10) realizuojama tokiu būdu:

1. Apskaičiuojame $\tilde{u}$ iš (3.1).
2. Apskaičiuojame σ^p iš (3.6).
3. Randame $\overset{\circ}{u}$ ir $\overset{\circ}{v}$ iš (3.7).
4. Apskaičiuojame $\hat{\sigma}$ iš (3.8).
5. Randame $\hat{u}$ ir $\tilde{v}$ iš (3.9) ir (3.10).
6. Apskaičiuojame $\hat{v}$ iš (3.2).

TEOREMA 1. *Skirtuminės schemos (3.1)–(3.7) sprendinys konverguoja į uždavinio (1.1)-(1.3) sprendinį, o konvergavimo greitis yra* $O(\tau + h^2)$.

Ši teorema įrodoma remiantis metodika, pateikta darbe [2].

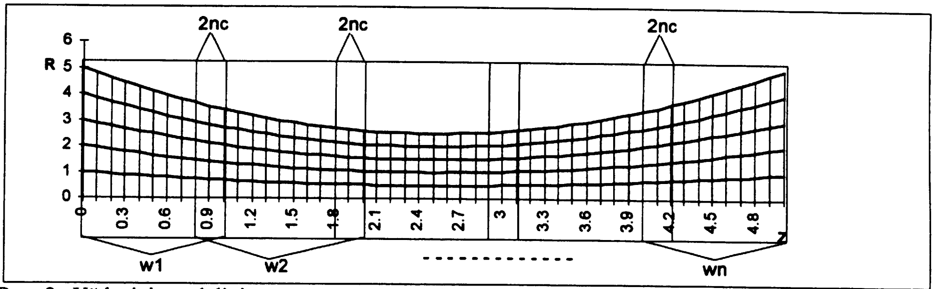
4. Lygiagrečioji algoritmo versija

Uždavinį spręsime lygiagrečiuoju kompiuteriu su paskirstyta atmintimi. Tegul turime p procesorių, kurie yra heterogeniniai.

4.1 Statinis užduočių padalinimas procesams. Užduotys paskirstomas tarp procesų sprendimo pradžioje ir šis paskirstymas nekinta sprendimo eigoje. Laikoma, kad procesorių galingumai laike kinta nykstamai mažai (apkrovimas apytikriai vienodas visą skaičiavimo laiką) ir uždavinio perskirstyti nereikia.

4.2 Tiesinė topologija. Skaičiavimo apimtis tiesiogiai proporcinga apdorojamų taškų skaičiui. Todėl diskretusis tinklas $\omega_r \times \omega_z$ padalinamas į p dalių pagal z koordinatę tiesiog proporcingai procesorių galingumams. Tarkime, procesorių galingumai yra $w_j, j = 1,\ldots,p$, klasterio suminis galingumas $W = \sum_{j=1}^{p} w_j$. Tada j-tajam procesui skiriama $\left\lceil \frac{M \cdot w_j}{W} \right\rceil$ diskrečiojo ω_Z tinklo taškų. O ω_r tinklo taškai yra nedalinami ir visi priklauso tam pačiam procesui.

4.3 Komunikacija tarp procesų. Komunikacija vyksta tik tarp kaimyninių procesų. Bendru atveju, duomenų apsikeitimo laiką galima aprašyti tokiu modeliu: $T_{comm} = T_S + \beta n$, čia T_{comm} yra bendras duomenų apsikeitimo laikas, T_S – duomenų apsikeitimo proceso inicializacijos laikas (*startup time*), β – duomenų vieneto perdavimo laikas, n – perduodamų duomenų kiekis. Būtina pažymėti, kad $T_S >> \beta$. Įvairiems kompiuterių klasteriams eksperimentiškai nustatyta, kad $T_S = 500 \div 2000\beta$. Tam, kad uždavinys būtų sprendžiamas efektyviai, reikia minimizuoti komunikacijų tarp procesų laiką. Šiam tikslui pasiekti įvedame tokią algoritmo modifikaciją: procesams skiriamos persidengiančios tinklo $\omega_r \times \omega_z$ sritys po $\left[\frac{M \cdot w_j}{W}\right] + 2n_c$ taškų. Tokiu būdu duomenimis galima apsikeisti ne kiekviename žingsnyje, o kas n_c žingsnių (žr. 2 pav.). Tokia modifikacija padidina skaičiavimų apimtis, tačiau sumažina startavimo laiką n_c kartų. Optimali n_c reikšmė priklauso nuo konkrečių β ir algoritmo realizacijos kaštų reikšmių.



Pav. 2. Uždavinio padalinimo procesams pavyzdys.

4.4 Lygiagrečiojo algoritmo efektyvumas. Baigtinių skirtumų schemos vieno laiko žingsnio realizacija reikalauja atlikti $O(MN + MP)$ aritmetinių operacijų. Šie skaičiavimai optimaliai paskirstomi tarp visų p procesorių. Lygiagrečiajame algoritme papildomai tenka realizuoti duomenų mainus tarp kaimyninių procesorių. Šį laiką įvertiname formule

$$T = 2\left(T_S + \beta\, O(N)\right).$$

Todėl didindami M gauname, kad skaičiavimai (o tuo pačiu ir skaičiavimo laikas) sudaro vis didesnę viso lygiagrečiojo algoritmo realizacijos dalį, t.y. pagreitėjimas $S_p \to W$, kai $M \to \infty$, o algoritmo efektyvumas $E_p = \frac{S_p}{W} \to 1$, kai $M \to \infty$.

LITERATŪRA

[1] R. Čiegis, A. Dement'ev, Numerical simulation of counteracting of focussed laser beams in a nonlinear media. *Mathematical Modelling and Applied Mathematics*, Ed. A.Samarskij, M.Sapagovas, North-Holland, (1992), 99-108.

[2] R.Čiegis, Numerical modelling of the interaction of focussed laser beams, *Lietuvos matematikos rinkinys*, 29(3) (1989) 590-607.

A parallel algorithm for solving one problem of nonlinear optics

R. Čiegis, G. Kairytė, P. Ratė

This paper deals with a system of nonlinear differential equations, which describe the interacion of two focussed laser beams.The problem is approximated by a splitting finite difference scheme. A nonuniform and adaptive difference grid is used in the analysis. A parallel version of the finite-difference scheme is proposed and the efficiency of this algorithm is investigated.