LMD mokslo darbai, 402–411
1998, Vilnius

Neutronų pernešimą trimačiu atveju aprašančių lygčių skaitmeninis sprendimas

V. Vileiniškis (VDU, LEI)

1. Įvadas

Branduolinio reaktoriaus saugaus darbo užtikrinimui būtina žinoti visą eilę reaktoriaus darbą apibūdinančių parametrų, kuriuos galima apskaičiuoti žinant neutronų pasiskirstymą reaktoriuje.

Padarę prielaidas, kad :

1. neutronas - bestruktūrinė dalelė, kuriai galioja klasikinės mechanikos dėsniai;
2. neutronų tarpusavio sąveikos galima nevertinti, tačiau neutronų tankis pakankamai didelis, kad jiems būtų galima taikyti pagrindinius statistinės fizikos teiginius;
3. neutronai gali atsirasti branduolių skilimo reakcijos metu ir gali būti sugeriami absorbcijos reakcijos metu,
4. neutronų pernešimas vyksta aplinkoje su izotropiniu išsklaidymu,

neutronų pernešimo lygtį galime užrašyti [1]:

$$\frac{1}{v_c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(s,\nabla)\varphi+\sigma\varphi=\frac{\sigma_s}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\varphi d\psi+f,$$

čia $\varphi=\varphi(\theta,\psi,x,t)$ – neutronų srautas, $v_c=\text{const}>0$ – neutronų greitis, $\sigma=\sigma(x)$, $\sigma_s=\sigma_s(x)$ – medžiagos savybes apibūdinančios funkcijos, f - šaltinių funkcija,

$$s=(s_1,s_2,s_3)=(\sin\theta\cos\psi,\sin\theta\sin\psi,\cos\theta),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\psi\le 2\pi,$$
$$x=(x_1,x_2,x_3),$$
$$0<\sigma_0\le\sigma\le\sigma_1<\infty,\ 0\le\sigma_s\le\sigma_{s1}.$$

Neutronai atsiranda praktiškai tuo pačiu metu, kai sunkių nuklidų branduoliai skyla į skeveldras. Kai kurių skeveldrų perėjimas iš sužadintos į pagrindinę būseną lydimas silpno neutroninio spinduliavimo, kurio intensyvumas staigiai padidėja po tam tikro laiko momento. Tai paaiškinama kelių neutronų grupių, atsirandančių po didelio laiko tarpo (iki 80 s) nuo branduolio skilimo momento, išspinduliavimu. Šie neutronai vadinami vėluojančiais. Nors vėluojančių neutronų dalis bendrame neutronų kiekyje tik apie 0,75%, jie suteikia galimybę valdyti branduolinio reaktoriaus darbą. Jų įtaka lygtyje įvertinama nariu [1]:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau_i} \chi^{(i)} C_i ,$$

čia $C_i = C_i(x,t)$ – branduolių, iš kurių atsiranda i-tosios grupės vėluojantys neutronai koncentracija, τ_i – branduolių, iš kurių atsiranda i-tosios grupės vėluojantys neutronai, gyvavimo laikas, $\chi^{(i)}$ – dalis i-tosios grupės vėluojančių neutronų.

Tuomet vienodu greičiu judančių neutronų sklidimą izotropinėje aplinkoje, įvertinant vienos grupės vėluojančius neutronus, galima aprašyti lygčių sistema [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v_c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (s, \nabla)\varphi + \sigma\varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \varphi d\psi + \frac{1}{\tau}\chi C, \\ &\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\tau} C = \frac{\sigma_f}{4\pi} \omega \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \varphi d\psi; \end{aligned} \tag{1}$$

su pradinėmis

$\varphi(\theta, \psi, x, 0) = \varphi_0(\theta, \psi, x)$, $\quad C(x,0) = C_0(x)$

ir kraštinėmis

$\varphi(\theta, \psi, x, t) = 0$, kai $x \in \partial D$, $(s,n) < 0$

sąlygomis;

čia $\sigma_f = \sigma_f(x)$, $\omega = \omega(x)$ – medžiagos savybes apibūdinančios funkcijos, $D = \{x_1, x_2, x_3$: $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$, $0 < x_3 < c\}$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ – vienetinis išorinės normalės ∂D vektorius, ∂D – gabalais tolydinis D kontūras.

Šiame darbe (1) lygčių sistemos sprendimui taikoma metodika, pasiūlyta darbe [2] nestacionarios dvimatės pernešimo lygties sprendimui, neįvertinant vėluojančių neutronų:

integralinių tapatybių metodas – aproksimavimui pagal erdvinius kintamuosius,

išskaidymo metodas – lygties, aprašančios momentinius neutronus, aproksimavimui pagal laiką,

Kranko–Nikolsono metodas – lygties, aprašančios vėluojančius neutronus, aproksimavimui pagal laiką,

kvadratūrų metodas – aproksimavimui pagal kampus.

2. Aproksimavimas pagal erdvinius kintamuosius

Integralinį narį pažymime:

$S\varphi = \dfrac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \varphi d\psi$ (1) padauginame erdvėje $L_2(D)$ iš funkcijos $v(x) \subset \overset{0}{W}{}_2^1(D)$.

Tada po integravimo dalimis turime:

$$\left(\frac{1}{v_c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, v\right) + \left(\varphi, -s_1\frac{\partial v}{\partial x_1} - s_2\frac{\partial v}{\partial x_2} - s_3\frac{\partial v}{\partial x_3}\right) + (\sigma\varphi, v) = S(\sigma_s\varphi, v) + \frac{1}{\tau}\chi(C, v)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}, v\right) + \left(\frac{1}{\tau}C, v\right) = S(\sigma_f\omega\varphi, v) \qquad (2)$$

$$(\varphi, v) = (\varphi_0, v), (C, v) = (C_0, v) \text{ kai } t = 0,$$

$$(u, v) = \int_D uv\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

Kraštines sąlygas taip pat užrašome apibendrintoje formoje:

$$\int_{\partial D_-} |s_1 n_1 + s_2 n_2 + s_3 n_3|\,\varphi v\,dxdy = 0,$$

$$v \in W_2^1 \; ir \; v|_{\delta D_-} = 0, \delta D \text{ yra } \delta D \text{ dalis, kuriai}$$

$$(s_1 n_1 + s_2 n_2 + s_3 n_3) > 0.$$

Įvedame D srityje tinklelį

$$x_{1_i} = i * h_1,\; x_{2_j} = j * h_2,\; x_{3_k} = k * h_3, \quad i = \overline{1, N-1},\; j = \overline{1, M-1},\; k = \overline{1, L-1}$$

ir apibrėžiame funkcijas:

$$\varphi_i(x_1) = \frac{1}{\gamma_{1_i}}\begin{cases} \dfrac{x_1 - x_{1_{i-1}}}{h_1}, x_1 \in (x_{1_{i-1}}, x_{1_i}); \\ \dfrac{x_{1_{i+1}} - x_1}{h_1}, x_1 \in (x_{1_i}, x_{1_{i+1}}); \\ 0, x_1 \notin (x_{1_{i-1}}, x_{1_{i+1}}). \end{cases}$$

Analogiškai apibrėžiame funkcijas $\varphi_j(x_2)$, $\varphi_k(x_3)$; γ_{1i}, γ_{2j}, γ_{3k} – normuojantys koeficientai, kuriuos nustatome iš sąlygų :

$$\int_0^a \varphi_i(x_1)dx_1 = 1,\; \int_0^b \varphi_j(x_2)dx_2 = 1,\; \int_0^c \varphi_k(x_3)dx_3 = 1.$$

Esant tolygiam tinkleliui $\gamma_{1_i} = h_1, \gamma_{2_j} = h_2, \gamma_{3_k} = h_3.$

Nuosekliai (2) imame

$$v = \varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2)\varphi_k(x_3), \quad i = \overline{1,N-1},\ j = \overline{1,M-1},\ k = \overline{1,L-1}.$$

Fiksuotam (i,j,k) turime:

$$\frac{1}{v_c}\frac{\partial\varphi_{ijk}}{\partial t}+\frac{|s_1|}{h_1}(\varphi_{ijk}-\varphi_{i-1jk})+\frac{|s_2|}{h_2}(\varphi_{ijk}-\varphi_{ij-1k})+\frac{|s_3|}{h_3}(\varphi_{ijk}-\varphi_{ijk-1})+\sigma_{ijk}\varphi_{ijk}=\sigma_{sijk}S\varphi_{ijk}+\frac{1}{\tau}\chi_{ijk}C_{ijk}+\varepsilon_1,$$

$$\frac{\partial C_{ijk}}{\partial t}+\frac{1}{\tau}C_{ijk}=\sigma_{fijk}\omega S\varphi_{ijk}+\varepsilon_2 \tag{3}$$

$$G_{ijk}=(G,\varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2)\varphi_k(x_3)), G=\varphi,C,\sigma,\sigma_s,\sigma_f,$$

čia ε_1, ε_2 - aproksimavimo paklaidos.

Atmetę aproksimavimo paklaidas, matricinėje formoje turime:

$$\frac{1}{v_c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(|s_1|A_1\oplus(E_2\oplus E_3)+|s_2|E_1\oplus(A_2\oplus E_3)+|s_3|E_1\oplus(E_2\oplus A_3))\Phi+\hat{\sigma}\Phi=$$

$$=\hat{\sigma}_s S\Phi+\frac{1}{\tau}\chi C,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{\tau}C=\hat{\sigma}_f\,\omega S\Phi$$

$$\Phi=\Phi_0, C=C_0,\ kai\ t=0.$$

Čia

$$A\oplus B=\begin{pmatrix} A_{11}B & . & . & . & A_{1K-1}B \\ . & . & . & . & . \\ A_{K-11}B & . & . & . & A_{K-1K-1}B \end{pmatrix} \quad A_i=\frac{1}{h_i}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{K_i-1}$$

$$\Phi=(\varphi_{1,1,1},\ldots,\varphi_{1,1,L-1},\ldots,\varphi_{1,M-1,L-1},\ldots,\varphi_{N-1,M-1,L-1})^T$$

Pažymėję

$$\Lambda_1=|s_1|A_1\oplus(E_2\oplus E_3)+|s_2|E_1\oplus(A_2\oplus E_3)+|s_3|E_1\oplus(E_2\oplus A_3),$$
$$\Lambda_2=\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_s S, \quad \Lambda_3=\hat{\sigma}_f\omega S,$$

galime užrašyti:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{v_c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}+(\Lambda_1+\Lambda_2)\Phi=\frac{1}{\tau}\chi C,\\&\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{\tau}C=\Lambda_3\Phi.\end{aligned} \tag{4}$$

Teiginys 2.1. *Operatorius $\Lambda_1+\Lambda_2$ teigiamai apibrėžtas Hilberto erdvėje su skaliarine sandauga*

$$(u,v)_h=\sum_{i,j,k}h^3\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}u_{ijk}(\theta,\psi)v_{ijk}(\theta,\psi)d\psi$$

ir norma $\|u\|_h=(u,u)_h^{0.5}$, jei $\min\limits_{i,j,k}\left(\sigma_{ijk}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sigma_{sijk}\right)>0.$

Teiginys 2.2. *Jei*

$$a=\frac{1}{8}\chi\sigma_f\omega\pi\tau^{-\frac{1}{2}}(T+1)+\frac{\chi}{2\tau},\quad b=\frac{\chi}{4}\left(1-e^{-\frac{2T}{\tau}}\right),$$

tai

$$\frac{1}{2v_c}\max_{t\in[0,T]}\|\Phi\|_h^2+\alpha\int_0^T\|\Phi\|_h^2dt-a\int_0^T\|\Phi\|_h^2dt\le b\|C_0\|_h^2+\frac{1}{2v_c}\|\Phi_0\|_h^2.$$

Tuomet, esant tam tikroms realaus objekto fizinėms charakteristikoms, kai $\alpha>a$ sprendinys egzistuoja ir yra vienintelis.

Pasinaudoję teiginiu , įrodytu [3] dvimačiam atvejui:

jei sprendinys $\Phi_T=(\varphi,\varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2))$ priklauso erdvei $W_2^1(D)$, tai $\|\Phi_T-\Phi\|_h\le ch,$ čia c nepriklauso nuo h, galime užrašyti:

$$\max_{t\in[0,T]}\|\Phi_T-\Phi\|_h+c_1\left(\int_0^T\|\Phi_T-\Phi\|_h^2dt\right)^{0.5}\le c_2h,$$

čia $h=max(h_1,h_2,h_3)$, $c1$, $c2$ nepriklauso nuo h.

3. Aproksimavimas pagal laiką

Atsižvelgę į Λ_1 ir Λ_2 savybes, galime suformuluoti (4) lygčių sistemos aproksimavimo laiko atžvilgiu algoritmą pakomponentinio išskaidymo metodu:

$$\left(E+\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_1\right)\Phi^{r-\frac{2}{3}}=\left(E-\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_1\right)\Phi^{r-1},\quad \left(E+\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_2\right)\Phi^{r-\frac{1}{3}}=\left(E-\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_2\right)\Phi^{r-\frac{2}{3}},$$
$$\Phi^{r+\frac{1}{3}}=\Phi^{r-\frac{1}{3}}+2\Delta t_1 C^r,$$
$$\left(E+\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_2\right)\Phi^{r+\frac{2}{3}}=\left(E-\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_2\right)\Phi^{r+\frac{1}{3}},\quad \left(E+\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_1\right)\Phi^{r+1}=\left(E-\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_1\right)\Phi^{r+\frac{2}{3}}, \tag{6}$$
$$\frac{C^{r+1}-C^{r-1}}{2\Delta t_1}+\frac{1}{\tau}\frac{C^{r+1}+C^{r-1}}{2}=\Lambda_3\Phi^r,$$
$$\Delta t_1=v_c\Delta t$$

(6) išreiškę Φ^{r+1} per Φ^{r-1} ir C^r, bei atlikę nesudėtingus pertvarkymus, turime

$$\frac{\Phi^{r+1}-\Phi^{r-1}}{2\Delta t_1}+(\Lambda_1+\Lambda_2)\Phi^r=\frac{\tau}{\chi}C^r+O(\Delta t_1^2).$$

Iš čia gauname, kad pirmos penkios (6) lygtys aproksimuoja (4) pirmą lygtį $t_{r-1}\le t\le t_{r+1}$ intervale $O(\Delta t_1^2)$ tikslumu.

Paskutinė (6) lygtis aproksimuoja (4) antrą lygtį taip pat lygtį $t_{r-1}\le t\le t_{r+1}$ intervale $O(\Delta t_1^2)$ tikslumu.

Be to,

$$\begin{aligned}\|\Phi_{r+1}\|&\le\|\Phi_{r-1}\|+2\Delta t_1\|C_r\|,\\ \|C_{r+1}\|&\le\|C_{r-1}\|+2\Delta t_1 A\|\Phi_r\|,\end{aligned}\tag{7}$$

čia A – konstanta, nepriklausanti nuo Δt_1.

Pažymėję

$$D_r=\|\Phi_r\|+\|C_r\|,\quad q=max\{2\Delta t_1,2\Delta t_1 A\},$$

iš (7) gauname

$$D_{r+1}\le D_{r-1}+qD_r.$$

Arba

$$D_{r+1}\le D_0+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}qD_{2j}. \tag{8}$$

Pasinaudosim Gronvalio lema [4]:
Tegul $\{w_n\}$ – neneigiamų realių skaičių seka, tenkinanti

$$w_n \le \beta_n + \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l w_l, \quad n \ge 0$$

čia $\alpha_l \ge 0$, *$\{\beta_n\}$ nemažėjanti neneigiamų skaičių seka. Tada*

$$w_n \le \beta_n \, exp\left(\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l\right), \quad \mathrm{n} \ge 0.$$

Gauname

$$D_{r+1} \le D_0 \, exp\left(q\left(\frac{r+1}{2}\right)\right).$$

Iš čia seka schemos (6) stabilumas.

4. Aproksimavimas pagal kampus

Pakeitę (6) integralus kubatūrine formule

$$S\varphi = \sum_{u=1}^{P} \sum_{v=1}^{D} A_{uv} \varphi(\theta_u, \psi_v),$$

gauname tiesinių algebrinių lygčių sistemą:

$$\left(E + \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{1pd}\right) \Phi_{pd}^{r-\frac{2}{3}} = \left(E - \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{1pd}\right) \Phi_{pd}^{r-1}, \tag{9}$$

$$\left(E + \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{2pd}\right) \Phi_{pd}^{r-\frac{1}{3}} = \left(E - \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{2pd}\right) \Phi_{pd}^{r-\frac{2}{3}}, \tag{10}$$

$$\Phi_{pd}^{r+\frac{1}{3}} = \Phi_{pd}^{r-\frac{1}{3}} + 2\Delta t_1 C^r, \tag{11}$$

$$\left(E + \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{2pd}\right) \Phi_{pd}^{r+\frac{2}{3}} = \left(E - \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{2pd}\right) \Phi_{pd}^{r+\frac{1}{3}}, \tag{12}$$

$$\left(E + \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{1pd}\right) \Phi_{pd}^{r+1} = \left(E - \frac{\Delta t_1}{2} \Lambda_{1pd}\right) \Phi_{pd}^{r+\frac{2}{3}}, \tag{13}$$

$$\frac{C^{r+1}-C^{r-1}}{2\Delta t_1}+\frac{1}{\tau}\frac{C^{r+1}+C^{r-1}}{2}=\Lambda_{3pd}\Phi^{r}. \tag{14}$$

5. Skaitmeninė algoritmo realizacija

(9) lygtį galime užrašyti:

$$[1+\frac{\Delta t_1}{2}(\frac{|s_{1pd}|}{h_1}+\frac{|s_{2pd}|}{h_2}+\frac{|s_{3pd}|}{h_3})]\varphi_{ijkpd}^{r-\frac{2}{3}}-\frac{\Delta t_1}{2}\frac{|s_{1pd}|}{h_1}\varphi_{i-1jkpd}^{r-\frac{2}{3}}-\frac{\tau}{2}\frac{|s_{2pd}|}{h_2}\varphi_{ij-1kpd}^{r-\frac{2}{3}}-$$
$$-\frac{\Delta t_1}{2}\frac{|s_{3pd}|}{h_3}\varphi_{ijk-1pd}^{r-\frac{2}{3}}=[1-\frac{\tau}{2}(\frac{|s_{1pd}|}{h_1}+\frac{|s_{2pd}|}{h_2}+\frac{|s_{3pd}|}{h_3})]\varphi_{ijkpd}^{r-1}+ \tag{15}$$
$$+\frac{\tau}{2}\frac{|s_{1pd}|}{h_1}\varphi_{i-1jkpd}^{r-1}+\frac{\tau}{2}\frac{|s_{2pd}|}{h_2}\varphi_{ij-1kpd}^{r-1}+\frac{\tau}{2}\frac{|s_{3pd}|}{h_3}\varphi_{ijk-1pd}^{r-1}.$$

Pažymėję

$$\xi_{ijkpd}^{r-1}=[1-\frac{\Delta t_1}{2}(\frac{|s_{1pd}|}{h_1}+\frac{|s_{2pd}|}{h_2}+\frac{|s_{3pd}|}{h_3})]\varphi_{ijkpd}^{r-1}+\frac{\Delta t_1}{2}\frac{|s_{1pd}|}{h_1}\varphi_{i-1jkpd}^{r-1}+\frac{\Delta t_1}{2}\frac{|s_{2pd}|}{h_2}\varphi_{ij-1kpd}^{r-1}+$$
$$+\frac{\Delta t_1}{2}\frac{|s_{3pd}|}{h_3}\varphi_{ijk-1pd}^{r-1},$$

(15) sprendinį užrašome:

$$\varphi_{ijkpd}^{r-\frac{2}{3}}=\left[1-\frac{\Delta t_1}{2}\left(\frac{|s_{1pd}|}{h_1}+\frac{|s_{2pd}|}{h_2}+\frac{|s_{3pd}|}{h_3}\right)\right]^{-1}*$$
$$*\left[\varsigma_{ijkpd}^{r-1}+\frac{\Delta t_1}{2}\left(\frac{|s_{1pd}|}{h_1}\varphi_{i-1jkpd}^{r-\frac{2}{3}}+\frac{|s_{2pd}|}{h_2}\varphi_{ij-1kpd}^{r-\frac{2}{3}}+\frac{|s_{3pd}|}{h_3}\varphi_{ijk-1pd}^{r-\frac{2}{3}}\right)\right]. \tag{16}$$

(10) lygtį sprendžiame pagal šią metodiką:
paveikiame (10) lygtį operatoriumi S, tuomet

$$S(E+\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_{2pd})\Phi_{pd}^{r-\frac{1}{3}}=S(E-\frac{\Delta t_1}{2}\Lambda_{2pd})\Phi_{pd}^{r-\frac{2}{3}}.$$

Pažymėję

$$\Phi_0^{r-\frac{1}{3}}=S\,\Phi_{pd}^{r-\frac{1}{3}},\quad \Phi_0^{r-\frac{2}{3}}=S\,\Phi_{pd}^{r-\frac{2}{3}},$$

turime:

$$(E+\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_s))\Phi_0^{r-\frac{1}{3}}=(E-\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_s))\Phi_0^{r-\frac{2}{3}}$$

Iš čia:

$$\Phi_0^{r-\frac{1}{3}}=(E+\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_s))^{-1}(E-\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_s))\Phi_0^{r-\frac{2}{3}}.$$

Be to iš (10):

$$(E+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma})\Phi_{pd\beta}^{r-\frac{1}{3}}-\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_s\Phi_0^{r-\frac{1}{3}}=(E-\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma})\Phi_{pd\beta}^{r-\frac{2}{3}}+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_s\Phi_0^{r-\frac{2}{3}},$$

$$\Phi_{pd\beta}^{r-\frac{1}{3}}=(E+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma})^{-1}((E-\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma})\Phi_{pd\beta}^{r-\frac{2}{3}}+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_s\Phi_0^{r-\frac{2}{3}}+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_s S\,\Phi_0^{r-\frac{1}{3}}).$$

Galutinai turime:

$$\Phi_{pd\beta}^{r-\frac{1}{3}}=(E+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma})^{-1}((E-\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma})\Phi_{pd\beta}^{r-\frac{2}{3}}+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_s\Phi_0^{r-\frac{2}{3}}+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_s(E+\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_s))^{-1}*$$
$$*(E-\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_s))\Phi_0^{r-\frac{2}{3}}),$$

arba:

$$\begin{aligned}\varphi_{ijkpd}^{r-\frac{1}{3}}&=(1+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_{ijk})^{-1}(\xi_{ijkpd}^{r-\frac{2}{3}}+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_{sijk}(1+\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}_{ijk}-\hat{\sigma}_{sijk}))^{-1}*\\&*(1-\frac{\Delta t_1}{2}(\hat{\sigma}_{ijk}-\hat{\sigma}_{sijk}))\sum_{u=1}^{P}\sum_{v=1}^{D}A_{uv}\varphi_{ijkuv}^{r-\frac{2}{3}},\end{aligned}\qquad(17)$$

čia

$$\xi_{ijkpd}^{r-\frac{2}{3}}=(1-\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_{ijk})\varphi_{ijkpd}^{r-\frac{2}{3}}+\frac{\Delta t_1}{2}\hat{\sigma}_{sijk}\sum_{u=1}^{P}\sum_{v=1}^{D}A_{uv}\varphi_{ijkuv}^{r-\frac{2}{3}}.$$

(11) lygtį galime užrašyti:

$$\varphi_{ijkpd}^{r+\frac{1}{3}}=\varphi_{ijkpd}^{r-\frac{1}{3}}+2\Delta t_1 C_{ijk}^{r}.\qquad(18)$$

(12) lygties sprendinys analogiškas (18) formulei, tik reikia pakeisti indeksus: vietoje r imti $r+1$.

(13) lygties sprendinys analogiškas formulei (17), tik reikia pakeisti indeksus: vietoj r imti $r+5/3$.

(14) lygties sprendinį galime užrašyti:

$$C_{ijk}^{1} = \frac{2\tau - \Delta t_1}{2\tau + \Delta t_1} C_{ijk}^{0} + \frac{2\tau \Delta t_1}{\tau + \Delta t_1} \hat{\sigma}_{fijk} \omega_{ijk} \sum_{u=1}^{P} \sum_{v=1}^{D} A_{uv} \varphi_{ijkuv}^{0},$$

$$C_{ijk}^{r+1} = \frac{\tau - \Delta t_1}{\tau + \Delta t_1} C_{ijk}^{r-1} + \frac{2\tau \Delta t_1}{\tau + \Delta t_1} \hat{\sigma}_{fijk} \omega_{ijk} \sum_{u=1}^{P} \sum_{v=1}^{D} A_{uv} \varphi_{ijkuv}^{r}.$$

Taigi, pilnai apibrėžėme (1) lygčių sistemos skaitmeninio sprendimo algoritmą.

LITERATŪRA

[1] Ершов Ю. И., Шихов С. Б. Математические основы теории переноса: Т. 1. Основы теории. М.: Энергоатомиздат, 1985. 232 с.

[2] Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 264 с.

[3] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

[4] M.-N. Roux and V. Thomee, Numerical solution of semilinear integrodifferential equations of parabolic type with nonsmooth data, *SIAM J. Numer. Anal.*, 26 (1989), pp. 1291-1309.