LMD mokslo darbai, 438–440
1998, Vilnius

Об одной тригонометрической системе. II

А. Лауринчикас* (ВУ), П. Прокопович (Кошице)

В [1] рассматривалась система из 6 звеньев, совершающих вращательные движения на углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ соответственно. Длины звеньев $l_1, \ldots, l_6$. При некоторыз ограничениях в [1] были найдены формулы для углов α_1, α_2 и α_3 для того, чтобы конец 6-ого звена после соответствующих поворотов достиг точку (x, y, z) трехмерного пространства.

В настоящей заметке мы укажем части трехмерного пространства, все точки которых, могут быть достигнуты концом 6-ого звена, т.е. рассмотрим задачу о достижимости.

Сначала найдем границы достижимых частей пространства без учета углов α_1, α_5 и α_6, т.е. рассмотрим движения звеньев, которые осуществляются при помощи поворотов на углы α_2, α_3 и α_4. Как следует из [1], движения, получаемые при помощи углов α_2, α_3 и α_4, описываются матрицей $T_1 T_2 T_3$, где

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & l_2\cos\alpha_2 \\ -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & -l_2\sin\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 & l_3\cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 & l_3\sin\alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_4 & \sin\alpha_4 & 0 & l_4\cos\alpha_4 \\ -\sin\alpha_4 & \cos\alpha_4 & 0 & -l_4\sin\alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко вытекает (мы считаем, что $l_2 = l_3$ и $\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0$), что

$$T_1 T_2 T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_4 + l_2\cos(\alpha_2+\alpha_3) - l_2\cos\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_2\sin(\alpha_2+\alpha_3) - l_2\sin\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Работа поддержана Литовским фондом науки и студий.

Так как

$$T_0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & 0 & -\sin\alpha_1 & l_1\cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & 0 & \cos\alpha_1 & l_1\sin\alpha_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, полагая $\alpha_1 = 0$, получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = T_0T_1T_2T_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или же

$$\begin{cases} x = l_4 + l_2\cos(\alpha_2+\alpha_3) - l_2\cos\alpha_2 + l_1, \\ z = -l_2\sin(\alpha_2+\alpha_3) + l_2\sin\alpha_2. \end{cases}$$

Применяя формулы для разности косинусов и синусов, отсюда получаем

$$\begin{cases} x - l_1 - l_4 = 2l_2\sin\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2}\right)\sin\frac{\alpha_3}{2}, \\ z = -2l_2\cos\left(\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2}\right)\sin\frac{\alpha_3}{2}. \end{cases}$$

Возводя эти два равенства в квадрат и складывая, находим

$$(x - l_4)^2 + z^2 = 4l_2^2\sin^2\frac{\alpha_3}{2}.$$

Видим, что это – уравнение окружности с центром в точке $(l_1 + l_4, 0)$ и радиусом $2l_2\sin\frac{\alpha_3}{2}$. Поскольку $|\sin\frac{\alpha_3}{2}|$ мкняется от 0 до 1, то мы получаем, что на плоскости xz достигаюстя все точки круга с центром $(l_1 + l_4, 0, 0)$ и радиусом $2l_2$.

Сейчас найдем достижимые части пространства, учитывая углы α_5 и α_6. Из системы (см. [1])

$$\begin{cases} x = l_6\cos\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_1\cos\alpha_5 + l_4\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) \\ \qquad -l_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + l_6\sin\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_1\sin\alpha_5 + l_1\cos\alpha_1, \\ y = l_6\sin\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\sin\alpha_1\cos\alpha_5 + l_4\sin\alpha_1 + l_2\sin\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) \\ \qquad -l_2\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - l_6\cos\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_1\sin\alpha_5 + l_1\sin\alpha_1, \\ z = l_6\cos\alpha_6 - l_2\sin(\alpha_2+\alpha_3) + l_2\sin\alpha_2, \end{cases}$$

полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, получаем

$$\begin{cases} x = l_6\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_5 + l_4 + l_1, \\ y = -l_6\cos\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\sin\alpha_5 + l_5\sin\alpha_5, \\ z = l_6\cos\alpha_6. \end{cases}$$

Перенося свободные члены в левую сторону, возводя в квадрат и складывая, имеем

$$(x - l_1 - l_4)^2 + y^2 + z^2 = l_6^2 \sin^2 \alpha_6 + l_6^2 \cos^2 \alpha_6 + l_5^2 = l_5^2 + l_6^2.$$

Таким образом, мы получили уравнения сферы. Однако, полный шар не получается. Последнее утверждение вытекает из следующих рассуждений. Возводя в квадрат $x - l_1 - l_4$ и y и складывая, получаем

$$\begin{aligned}(x - l_1 - l_4)^2 + y^2 &= l_6 \sin^2 \alpha_5 \sin^2 \alpha_6 + l_5 \cos^2 \alpha_5 - 2l_6 l_5 \sin \alpha_5 \sin \alpha_6 \cos \alpha_5 \\ &\quad + l_6 \cos^2 \alpha_5 \sin^2 \alpha_6 + l_5 \sin^2 \alpha_5 - 2l_6 l_5 \sin \alpha_5 \cos \alpha_5 \sin \alpha_6 \\ &= l_6^2 \sin^2 \alpha_6 + l_5^2.\end{aligned}$$

Так как $0 \leqslant |\sin \alpha_6| \leqslant 1$, то отсюда находим, что

$$l_5^2 \leqslant (x - l_1 - l_4)^2 + y^2 \leqslant l_5^2 + l_6^2.$$

Таким образом, мы получаем, что из шара следует выбросить часть пространства, попадающего в цилидр

$$(x - l_1 - l_4)^2 + y^2 = l_5^2.$$

Теперь, чтобы получить достижимую область пространства, следует к кругу

$$(x - l_4)^2 + z^2 = 4l_2^2$$

добавить вырезанный шар. Учитывая еще угол α_1, $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 2\pi$, получим некоторый тор.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Лауринчикас, П. Прокопович, Об одной тригонометрической сисмеме, *LMD konf. darbai*, Technika, Vilnius, 1997, 304–308.

Apie vieną trigonometrinę sistemą. II

A. Laurinčikas (VU), P. Prokopovič (Košice)

Straipsnyje nagrinėjama vienos trigonometrinės sistemos, sudarytos iš 6 grandžių, paskutine grandimi pasiekiama erdvės dalis.