LMD mokslo darbai, 459–462
1998, Vilnius

Daugiamatės automatinio valdymo sistemos matematinio modelio tyrimas

J. Rimas (KTU)

Nagrinėsime lygtį

$$Dx(t)=B_0x(t)+B_1x(t-\tau)+z(t)\,; \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius (taikomas apibendrintomis funkcijomis), $B_0=-\kappa E$, E – vienetinė n-tosios eilės matrica, $\kappa=\mathrm{const}$ – koeficientas,

$$B_1=\frac{\kappa}{2}B\,,\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} - \tag{2}$$

n-tosios eilės matrica, $x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, τ – pastovus vėlinimas, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(1) lygtis yra ryšio tinklo sinchronizacijos sistemos (automatinio valdymo sistemos), sudarytos iš n sujungtų į žiedą generatorių, matematinis modelis. Jos sprendinys gali būti užrašytas taip [1]:

$$x(t)\div\sum_{l=0}^{L}(A^{-1}B_1e^{-p\tau})^l A^{-1}Z(p),\ 0<t<(L+1)\tau\,,$$

čia $A=pE-B_0$, $A^{-1}=\dfrac{1}{p+\kappa}E$, $Z(p)\div z(t)$.

Panaudoję (2) pažymėjimą, turėsime

$$x(t)\div\sum_{l=0}^{L}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l\frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}}e^{-pl\tau}B^lZ(p),\ 0<t<(L+1)\tau\,. \tag{3}$$

Iš (3) išplaukia

$$h(t)=(h_{ij}(t))\div\sum_{l=0}^{L}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l\frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}}e^{-pl\tau}B^l\,,\ 0<t<(L+1)\tau\,; \tag{4}$$

čia $h(t)$ – sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica, $h_{ij}(t)$ $(i,j=\overline{1,n})$ -i-tojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j-tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį.

Rasime pereinamųjų funkcijų išraiškas. Tuo tikslu apskaičiuosime matricos B l-tąjį laipsnį. Skaičiavimus atliksime pasinaudoję formule

$$B^l = TJ^lT^{-1}; \tag{5}$$

čia J – matricos B Žordano forma, T – transformuojančioji matrica. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{6}$$

Pažymėkime

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & & \\ & 1 & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & & & & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 \\ & 1 & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & 1 & \alpha \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Tada

$$|B - \lambda E| = D_n(-\lambda). \tag{8}$$

Iš (7) išplaukia

$$D_n(\alpha) = \alpha\Delta_{n-1}(\alpha) - 2\Delta_{n-2}(\alpha) - 2(-1)^n \tag{9}$$

ir

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha\,\Delta_{n-1}(\alpha) - \Delta_{n-2}(\alpha) \qquad (\Delta_2(\alpha) = \alpha^2 - 1,\ \Delta_1 = \alpha). \tag{10}$$

Išsprendę (10) skirtuminę lygtį, randame $\Delta_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$D_n(\alpha) = U_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2(-1)^n; \tag{11}$$

čia $U_n(x)$ yra n-tojo laipsnio antrojo tipo Čebyševo daugianaris.

Pasinaudoję lygybe $T_n(x) = \frac{1}{2}\left(U_n(x) - U_{n-2}(x)\right)$ [3], turime

$$D_n(\alpha) = 2\left[T_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) - (-1)^n\right]; \tag{12}$$

čia $T_n(x)$ yra n-tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Visi daugianario $T_n(x)$ nuliai yra intervale $[-1,1]$ ir gali būti surasti naudojantis formule

$$x_{nk} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1,2,\dots,n. \tag{13}$$

Tai išplaukia iš žinomos lygybės

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \qquad -1 \le x \le 1. \tag{14}$$

Panaudoję (13) išraišką, randame daugianario $T_n(y) - (-1)^n$ nulius:

$$y_{nk} = \cos\frac{k\pi}{n}; \tag{15}$$

čia $k = 1,3,5, \dots, n$, kai n nelyginis, ir $k = 0,2,4, \dots, n$, kai n lyginis.

Toliau nagrinėsime atvejį, kai $n = 4p$ $(p \in N)$.

Remdamiesi (8), (12) ir (15) išraiškomis, užrašome (6) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes) [3]:

$$\lambda_k = -2\cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0,2,4,\dots,n. \tag{16}$$

Tikrinės reikšmės λ_0 ir λ_n yra paprastosios, o λ_k, $k = \overline{2, n-2}$ kartotinės (kartotinumas $l_k = 2$).

Rasime marticos B Žordano formą (matricą J). Paprastajai tikrinei reikšmei λ_i ($i= \overline{0,n}$) matricoje J atitiks viena Žordano ląstelė $J_1(\lambda_i)$. Kartotinei tikrinei reikšmei λ_i ($i = \overline{2, n-2}$) matricoje J atitiks dvi Žordano ląstelės $J_1(\lambda_i)$, nes rangas $r(B - \lambda_i E) = n - 2$ ir $n - r(B - \lambda_i E) = 2$, $i = \overline{2, n-2}$ (čia n – matricos B eilė) [2]. Įvertinę tai ir pasinaudoję atitiktimi $\lambda_{2k} = -\lambda_{n-2k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-4}{4})$ užrašome matricos B Žordano formą:

$$J = diag(-\lambda_n\, -\lambda_{n-2}\, -\lambda_{n-2}\, -\lambda_{n-4}\, -\lambda_{n-4} \dots -\lambda_{\frac{n}{2}+2}\, -\lambda_{\frac{n}{2}+2}\, 0\, 0\, \lambda_{\frac{n}{2}+2}\, \lambda_{\frac{n}{2}+2} \dots \lambda_{n-2}\, \lambda_{n-2}\, \lambda_n). \tag{17}$$

Remdamiesi lygybe $J = T^{-1}BT$, randame matricą T ir jai atvirkštinę matricą T^{-1}. Apskaičiuojame matricos B l-tąjį laipsnį:

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{n}{2}-1} & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \tag{18}$$

čia

$$a_m(l) = [1 + (-1)^{l+m-1}]\sum_{k=0}^{\frac{n-4}{4}} l_{n-2k}\lambda_{n-2k}^l T_{m-1}\left(\frac{\lambda_{n-2k}}{2}\right), m = \overline{1, \tfrac{n}{2} + 1}, \tag{19}$$

l_i – tikrinio skaičiaus λ_i kartotinumas, $n = 4p$ $(p \in N)$ – matricos B eilė, $T_k(x)$ – k–tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Įstatę (18) į (4) ir atlikę reikiamus pertvarkymus, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą

$$h(t)=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix};$$

čia

$$h_{ii}(t)=h_1(t),\ i=\overline{1,n},$$

$$h_{ii+1}(t)=h_{i+1i}(t)=h_2(t),\ i=\overline{1,n-1},$$

$$h_{ii+2}(t)=h_{i+2i}(t)=h_3(t),\ i=\overline{1,n-2},$$

....

$$h_{ii+\frac{n}{2}}(t)=h_{i+\frac{n}{2}i}(t)=h_{\frac{n}{2}+1}(t),\ i=\overline{1,\tfrac{n}{2}},$$

$$h_{ii+\frac{n}{2}-1}(t)=h_{i+\frac{n}{2}-1i}(t)=h_{\frac{n}{2}}(t),\ i=\overline{1,\tfrac{n}{2}+1},$$

....

$$h_{ii+n-1}(t)=h_{i+n-1i}(t)=h_2(t),\ i=1,$$

$$h_1(t)=e^{-\kappa t}1(t)+g_1(t),\ h_i(t)=g_i(t),\ i=\overline{2,\tfrac{n}{2}+1},$$

$$g_i(t)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{L}a_i(l)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l\frac{(t-l\tau)^l}{l!}e^{-\kappa(t-l\tau)}1(t-l\tau),\ i=\overline{1,\tfrac{n}{2}+1},0<t<(L+1)\tau\ ,$$

$1(t)$ – vienetinė funkcija, $a_i(l)$ $(i=\overline{1,\frac{n}{2}+1})$ – žiūr. (19) išraišką, $n=4p\ (p\in N)$.

Gautos tikslios analizinės pereinamųjų funkcijų išraiškos gali būti panaudotos sistemos dinamikai tirti, jos statistinėms charakteristikoms skaičiuoti, perdavimo funkcijoms ir dažninėms charakteristikoms rasti.

LITERATŪRA

[1] Rimas J.Z. Issledovanie dinamiki sistem vzaimnoj sinchronizacii. *Radiotechnika*, 1977, T32, N2, s. 3 – 9.
[2] Horn R., Johnson Ch. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1986.
[3] S.Paškovskij. *Vyčislitelnyje primenenija mnogočlenov i riadov Čebyševa*, Maskva, 1983.

Investigation of the matematical model of the multimensional automatic control system

J. Rimas

The mathematical model of the mutual synchronisation system composed of $n=4p\ (p\in N)$ joined into a ring oscillators is investigated. The precise analytical expressions of the elements of the step responses matrix of the system are obtained.