LMD mokslo darbai, 478–482
1998, Vilnius

Standumo charakteristikų sintezės uždavinys, esant subharmoniniams virpesiams

G. Zaksienė (KTU)

Netiesinių diferencialinių lygčių sistemos aprašo daugelio mechaninių, elektroninių ir kitokių mašinų ar prietaisų darbą. Dažniausiai netiesinės sistemos sprendžiamos artutiniais metodais (harmoninės linearizacijos, harmoninio balanso, mažo parametro). Tikslūs sprendiniai žinomi tik atskirais atvejais. Sąmoningo netiesiškumų panaudojimo netiesinių virpesių teorijoje vengta. Šiame darbe skirtingai nuo tradicinio požiūrio realizuojami tam tikri sistemos rėžimai $x(t)$, nustatant netiesines standumo ir slopinimo charakteristikas iš duotos lygties.

Tegul žinoma diferencialinė lygtis

$$\ddot{x} + f(x) + r(\dot{x}, x) = H(t) \tag{1}$$

$f(x)$, $r(x, \dot{x})$ – standumo ir slopinimo charakteristikos, $H(t)$ – žadinimo jėga.

Slopinimo charakteristika gali būti surandama iš sąlygos, kad žadinimo jėgos darbas A_{zad} atliktas per periodą ir pasipriešinimo jėgos darbas A_{prs} turi būti lygūs

$$A_{zad} = A_{prs},$$

$$A_{zad} = \int_T H(t) \cdot \dot{x}(t)\,dt, \tag{2}$$

$$A_{prs} = \int_T r(x, \dot{x})\,\dot{x}\,dt.$$

Jei $H(t)$ ir $x(t)$ žinomi, slopinimas randamas iš (2) sąlygos.

Tarkime, kad slopinimo charakteristiką pavyko nustatyti, tokiu atveju standumo charakteristiką galima gauti iš (1), išreiškus judėjimo dėsnį per parametrą $t = t(x)$ ir įstačius į (1) lygtį. Jei atvirkštinė funkcija $t(x)$ surandama nevienareikšmiškai, tai standumo charekteristika $f(x)$ ieškoma kiekviename vienareikšmiškumo intervale. Skaitiniais metodais nustatant standumo charakteristiką, yra paprasčiau naudoti parametrines išraiškas

$$\begin{cases} x = x(t); \\ f(t) = H(t) - r\big(x(t), \dot{x}(t)\big) - \ddot{x}(t). \end{cases} \tag{3}$$

Funkcija $f(x)$ turi tenkinti sąlygą

$$\frac{df}{dx} \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4}$$

Būtinos ir pakankamos vienareikšmės standumo charakteristikos egzistavimo sąlygos seka iš jų mechaninės prasmės ir pasireiškia tuo, kad funkcijų elgesys $x(t)$ ir $f(t)$ turi būti vienodas. Bet kokiems $t_1, t_2, \ldots, t_k$

$$x(t_1) = x(t_2) = \ldots = x(t_k),$$

$$f(t_1) = f(t_2) = \ldots = f(t_k),$$

$$\dot{x}(t_k) = 0, \; f'(t_k) = 0, \; k = \overline{1,n}.$$

Būtinos $f(t)$ vienareikšmiškumo sąlygos gali būti užrašytos taip:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f'(t)}{x'(t)} \neq +\infty, \; 0 < t < T.$$

Toliau bus ieškoma standumo charakteristika, atitinkanti sistemos sprendinį

$$x = a \sin t \tag{5}$$

$$H(t) = h \sin(kt + \varphi), \; k = 1,2,\ldots. \tag{6}$$

Virpesiai $x = a\sin t$, esant slopinimui, negali būti (1) lygties sprendiniai. Iš tikrųjų, įstačius (5) ir (6) į (2) lygtį, turime

$$A_{zad} = \int_0^{2\pi} h \sin(kt + \varphi) \cdot \dot{x} dt = 0,$$

t.y. sistemos energija lygi 0, taigi bus priimta $r(x, \dot{x}) = 0$. Tokiu atveju standumo charakteristika bus surasta iš sistemos

$$\begin{cases} x = x(t), \\ f(t) = h \sin(kt + \varphi) - \ddot{x}. \end{cases} \tag{7}$$

Pareikalavus, kad būtų išpildyta vienareikšmiškumo sąlyga $\dot{x} = a\cos t$, kai $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{f}(t_1) = kh\cos\left(k\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 0$. Gausime $\varphi = \frac{\pi}{2}$ arba $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, kai k – lyginis ir $\varphi = 0$ arba $\varphi = \pi$, kai k nelyginis.

Tokiu būdu sprendiniui $x = a\sin t$ gali egzistuoti vienareikšmė standumo charakteristika, jei $H = h\sin kt$, $k = 1, 3, 5, \ldots$ arba $H = h\cos kt$, k = 2, 4, ….

Atskiri atvejai:

1. Standumo charakteristikų išraiškos, esant nelyginėms subharmonikoms

$$x = a\sin t, \quad \text{kai } H = h\sin kt$$

$$f(t) = h\sin kt + a\sin t, \; k = 1,3,5,\dots$$

$k = 3$ (subharmonika $\frac{1}{3}$)

$$f(x) = \left(1 + \frac{3h}{a}\right)x - \frac{4h}{a^3}x^3,$$

$k = 5$ (subharmonika $\frac{1}{5}$)

$$f(x) = \left(1 + \frac{5h}{a}\right)x - \frac{20h}{a^3}x^3 + \frac{16h}{a^5}x^5.$$

2. Standumo charakteristikų išraiškos, esant lyginėms subharmonikoms

$$x = a\sin t, \text{ kai } H = h\cos kt,$$

kai $k = 2$ (subharmonika $\frac{1}{2}$)

$$f(x) = x + h\left(1 - \frac{6x^2}{a^2}\right),$$

kai $k = 4$ (subharmonika $\frac{1}{4}$)

$$f(x) = x + h\left(1 - 2\frac{x^2}{a^2} + 8\frac{x^4}{a^4}\right).$$

Tikslių netiesinių standumo charakteristikų nustatymas, esant užsiduotam sistemos sprendiniui, leidžia tas charakteristikas panaudoti kaip etalonines, projektuojant mašinas, įvertinti artutinių metodų tikslumą, patikslinti žinomus faktus netiesinių virpesių teorijoje (n-tos eilės rezonansinių reiškinių egzistavimą).

Nagrinėsime netiesinius subharmoninius virpesius trimatėje sistemoje. Diferencialinių lygčių sistema aprašanti tokias sistemas turės pavidalą

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -f_1(x_1) + f_2(x_2) + H_1(t), \\ m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -f_2(x_2) + f_3(x_3) + H_2(t), \\ m_3(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) = -f_3(x_3) + H_3(t). \end{cases} \tag{8}$$

kur m_i – masės, $f_i(x_i)$ – standumo jėgos, $H_i(t)$ – žadinimo jėga.

Priimsime, kad

$$H_i(t) = h_i \sin kt, \quad i = \overline{1,3}, \quad k = 1,3,5,\ldots$$

ir i-tos masės sprendinys

$$x_i(t) = a \sin t, \quad i = 1,2,3. \tag{9}$$

Įstačius (9) į sistemą (8) ir išsprendus $f_i(t)$ atžvilgiu, gausime

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (h_1 + h_2 + h_3)\sin kt + [(m_1 + m_2 + m_3)a_1 + (m_1 + m_2)a_2 + m_3 a_3]\sin t, \\ f_2(t) &= (h_1 + h_3)\sin kt + [(m_2 + m_3)a_1 + (m_1 + m_2)a_2 + m_3 a_3]\sin t \\ f_1(t) &= h_3 \cdot \sin kt + m_3(a_1 + a_2 + a_3)\sin t. \end{aligned} \tag{10}$$

Pritaikius sinkt Čebyšovo formules, gauname

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= (h_1 + h_2 + h_3)T_k\left(\frac{x_1}{a_1}\right) + \alpha_1 \cdot \frac{x_1}{a_1}, \\ f_2(x_2) &= (h_2 + h_3)T_k\left(\frac{x_2}{a_2}\right) + \alpha_2 \cdot \frac{x_2}{a_2}, \\ f_3(x_3) &= h_3 \cdot T_k\left(\frac{x_3}{a_3}\right) + \alpha_3 \frac{x_3}{a_3}, \end{aligned} \tag{11}$$

kur

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (m_1 + m_2 + m_3)a_1 + (m_1 + m_2)a_2 + m_3 a_3 \\ \alpha_2 &= (m_2 + m_3)a_1 + (m_1 + m_2)a_2 + m_3 a_3 \\ \alpha_3 &= m_3(a_1 + a_2 + a_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Kai k = 1, turime

$$f_1(x_1) = (h_1 + h_2 + h_3 + \alpha_1)\frac{x_1}{a_1}$$

$$f_2(x_2) = (h_2 + h_3 + \alpha_2)\frac{x_2}{a_2}, \quad f_3(x_3) = (h_3 + \alpha_3)\frac{x_3}{a_3}. \tag{13}$$

Kadangi turi būti $\frac{df_i}{dx_i} > 0$, tai būtinos sprendinio egzistavimo sąlygos gaunamos tokios

$$h_1 + h_2 + h_3 + \alpha_1 > 0, \quad h_2 + h_3 + \alpha_2 > 0, \quad h_3 + \alpha_3 > 0. \tag{14}$$

Šią teoriją galima pritaikyti sistemos antirezonansiniam režimui gauti. Tuo tikslu reikia atitinkamai parinkti masės m_3, t.y. dinaminio slopintuvo parametrus.

Nagrinėkime atskirą atvejį – trečios eilės rezonansą $\frac{1}{3}$, $k=3$

$$T_3\left(\frac{x_1}{a_1}\right) = 3\frac{x_1}{a_1} - 4\frac{x_1^3}{a_1^3},$$

$$f_1(x_1) = [3(h_1 + h_2 + h_3) + a_1] - 4(h_1 + h_2 + h_3)\frac{x_1^3}{a_1^2},$$

$$f_2(x_2) = [3(h_2 + h_3) + a_2]\frac{x_2}{a_2} - 4(h_2 + h_3)\frac{x_2^3}{a_2^3},$$

$$f_3(x_3) = (3h_3 + a_3)\frac{x_3}{a_3} - 4h_3 \cdot \frac{x_3^3}{a_3^3}.$$

Kaip matyti iš išraiškų, jei nors vienas $h_i \neq 0$, subharmoniniai virpesiai galimi, tik netiesinėje sistemoje. Jei $h_3 \neq 0$, tai visos trys charakteristikos turi būti netiesinės. Kai $h_1 \neq 0$ ir $h_2 = h_3 = 0$, tiktai $f_1(x_1)$ turi būti netiesinė.

Išvados

1. Netiesinių standumo charakteristikų suradimo metodika gali būti pritaikyta projektuojant vibrostendus, vibrotransporterius ir kitas mašinas.
2. Tiksliais metodais įrodyta, kad sistemose su simetrine netiesine charakteristika, esant simetrinei žadinimo jėgai, gali egzistuoti lyginiai n – tos eilės rezonansai.

LITERATŪRA

[1] Grebnikov E.A, Riabov J.A. Konstruktyvūs netiesinių sistemų tyrimo metodai. Maskva, „Nauka", 1989 (rusų kalba).

[2] Babickis V.I. Vibrosmūginių sistemų teorija. Maskva, „Nauka", 1978 (rusų kalba).

The problem of synthesis in nonlinear systems

G. Zaksienė

Nonlinear systems with unknown stiffness characteristics are investigated when periodic solutions are fixed.