LMD mokslo darbai, 485–488
1998, Vilnius

Apie perkėlimo teoremą stochastinių ekstremumų schemoje

A. Aksomaitis (KTU)

Darbe pateikta nepriklausomų atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių perkėlimo teoremos dalinė analizė konvergavimo greičio požiūriu. Grindžiama išvada – teorema nevisada yra efektyvi šiuo požiūriu.

Tarkime, yra atsitiktinių dydžių sekos:

- $\{N_n, n \geq 1\}$, įgyjančių tik sveikas neneigiamas reikšmes,
- $\{X_j, j \geq 1\}$, nepriklausomų su pasiskirstymo funkcija F.

Dydžiai N_n ir X_j su visais $j \geq 1$ yra nepriklausomi. Apibrėžiame struktūras:

$$Z_n = \max\left(X_j, j = \overline{1,n}\right), \quad W_n = \min\left(X_j, j = \overline{1,n}\right).$$

Sakykime, kad tiesiškai normuotų struktūrų

$$\overline{Z}_n = \frac{Z_n - a_n}{b_n}, \quad \overline{W}_n = \frac{W_n - c_n}{d_n}$$

pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į neišsigimusias ribines pasiskirstymo funkcijas $H(x)$ ir $L(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{Z}_n < x\right) = H(x), \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\overline{W}_n < x\right) = L(x).$$

Kokios papildomos sąlygos indukuoja struktūrų

$$\overline{Z}_{N_n} = (1/b_n)\left(\max\left(X_{1,\dots,}X_{N_n}\right) - a_n\right)$$

ir

$$\overline{W}_{N_n} = (1/d_n)\left(\min\left(X_{1,\dots,}X_{N_n}\right) - c_n\right)$$

konvergavimą?

Atsitiktinis komponenčių skaičius N_n gali ženkliai keisti ekstremaliųjų reikšmių ir jų ribinių skirstinių struktūras.

Pavyzdžiui, tarkime

$$P(N_n = k) = 1/n, \quad k = \overline{1,n} \quad \text{ir} \quad F(x) = e^{-x^{\gamma}}, \quad x > 0, \gamma > 0.$$

Tada, imdami normavimo konstantas $a_n = 0$, $b_n = n^{1/\gamma}$, gauname: $P\left(\overline{Z}_n < x\right) = e^{-x^{-\gamma}}$.

Tokiu būdu, struktūra Z_n yra stabili: $F^n(xb_n + a_n) = F(x)$. Tačiau

$$P\left(\overline{Z}_{N_n} < x\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{kx^{-\gamma}}{n}}$$

jau nėra $F(x)$ tipo, o ribinis skirstinys

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\overline{Z}_{N_n} < x\right) = \left(1 - e^{-x^{-\gamma}}\right)x^{\gamma},\ x > 0$$

taip pat ženkliai skiriasi nuo $F(x)$. Jis jau nebus stabilus maksimumų operacijos atžvilgiu: nėra tokių normavimo konstantų α_n ir $\beta_n > 0$, su kuriomis $G^n(x\beta_n + \alpha_n) = G(x)$. Panaši situacija bus ir tuo atveju, kai N_n skirstinys – geometrinis.

Atsakymą į klausimą apie struktūros $\overline{Z}_{N_n}$ konvergavimą galima rasti B.V. Gnedenkos perkėlimo teoremoje [2]. Pakankama sąlyga, indukuojanti $P\left(\overline{Z}_{N_n} < x\right)$ konvergavimą, yra:

$$\lim_{n\to\infty} P(N_n / n < x) = A(x).$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{Z}_{N_n} < x\right) = \psi(x) = \int_0^{\infty} H^z(x)dA(z).$$

Dabar tarkime, kad X_j skirstinys yra logistinis:

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}},\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Įdomu pastebėti, jog šiam skirstiniui būdingas sąryšis: $F(x)(1 - F(x)) = p(x)$, kai $p(x)$ – skirstinio tankis.

Tarę, kad N_n skirstinys yra geometrinis, t.y.

$$P(N_n = k) = p_n(1 - p_n)^{k-1},\ k \ge 1$$

su parametru $p_n = 1/n$, iš perkėlimo teoremos gauname šitokį teiginį:

1 teiginys. $\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{Z}_{N_n} < x\right) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

Čia normavimo konstantos parinktos taip: $a_n = \ln n, b_n = 1$.

Įrodymas. Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{Z}_n < x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + e^{xb_n + a_n}\right)^{-n} = e^{-e^{-x}},\ x \in \boldsymbol{R},$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} P(N_n / n < x) = 1 - e^{-x},\ x > 0,$$

tai

$$\psi(x)=\int_0^\infty e^{-ze^{-x}}d\left(1-e^{-z}\right)=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Taigi, šiuo atveju ribinės struktūros $\overline{Z}_{N_n}$ skirstinys yra taip pat logistinis:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\overline{Z}_{N_n}<x\right)=\psi(x)=F(x),\tag{1}$$

nors

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\overline{Z}_n<x\right)=H(x)=e^{-e^{-x}},\ x\in\boldsymbol{R}.\tag{2}$$

Prasminga tirti konvergavimo greičius (1) ir (2) sąryšiuose, gauti jų tolygiuosius, netolygiuosius arba kitokio tipo įverčius. Tas dalinai atlikta [1] ir [3] darbuose (netolygieji įverčiai):

$$\left|P\left(\overline{Z}_n<x\right)-H(x)\right|\le\Delta_n(x),\quad\left|P\left(\overline{Z}_{N_n}<x\right)-\psi(x)\right|\le\Delta_{N_n}(x).$$

Netolygieji įverčiai $\Delta_n(x)\to 0$ ir $\Delta_{N_n}(x)\to 0$, kai $n\to\infty$.

Tačiau logistinio ir geometrinio skirstinių atveju yra reikšmingesnis konvergavimo greičio požiūriu teiginys.

2 teiginys. Jeigu X_j yra logistinis, o N_n – geometrinis, tai $\Delta_{N_n}(x)=0$.

Įrodymas. Teiginį įrodysime tiesioginiu metodu, nesinaudodami perkėlimo teorema. Turime:

$$P\left(\overline{Z}_{N_n}<x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}F^k(xb_n+a_n)p_n(1-p_n)^{k-1}=\frac{p_nF(xb_n+a_n)}{(1-p_n)(1-(1-p_n)F(xb_n+a_n))}.$$

Imdami $a_n=\ln n, b_n=1$ ir $p_n=1/n$, gauname:

$$P\left(\overline{Z}_{N_n}<x\right)=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Tokiu būdu,

$$\psi(x)=F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

ir $\Delta_{N_n}(x)=0$.

Iš 1 ir 2 teiginių išplaukia, jog perkėlimo teorema nors ir pateikia ribinio skirstinio skaičiuotės algoritmą, tačiau konvergavimo greičio požiūriu ji nėra ideali.

Iš 2 teiginio išplaukia, jog struktūra Z_{N_n} yra stabili logistinių dydžių atveju, kai N_n skirstinys yra geometrinis. Kai komponenčių skaičius maksimumų struktūroje nėra atsitiktinis, stabilumo nėra:

$$\left(1 + e^{-xb_n - a_n}\right)^{-n} \neq \left(1 + e^{-x}\right)^{-1}.$$

Pateiksime vieną teiginį minimumų schemoje.

3 teiginys. *Jeigu* X_j, $j \geq 1$ *yra logistinis, o* N_n *– geometrinis, tai*

$$P\left(\overline{W}_{N_n} < x\right) = F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \ x \in \boldsymbol{R}.$$

Čia normavimo konstantos $c_n = \ln n$, $d_n = 1$.

Įrodymas – tiesioginis, kaip ir 2 teiginio įrodymas.

Tokiu būdu, šiuo atveju $P\left(\overline{W}_{N_n} < x\right) = P\left(\overline{Z}_{N_n} < x\right) = F(x)$.

Pateikti teiginiai formuoja problemą: su kuriais atsitiktinių dydžių $X_j, j \geq 1$ ir $N_n \geq 1$ skirstiniais galioja sąryšis $P\left(\overline{Z}_{N_n} < x\right) = F(x)$?

LITERATŪRA

[1] Галамбош Я. *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*. М.: Наука, 1984.

[2] Гнеденко Б.В. и Гнеденко Д.Б. О распределениях Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей. Сердика, 1982, т. 8, с.229–234.

[3] Aksomaitis A. The nonuniform estimation of the convergence rate in the transfer theorem for extremal values. *Lith. Math. Journal*, 2, 1987, 219–223 p.

About the transference theorem in the scheme of the extrema

A. Aksomaitis

In the report there is presented the analysis of the transference theorem in the maxscheme with respect to the rate of convergence.