LMD mokslo darbai, 497–501
1998, Vilnius

Konvergavimo greičio įvertis daugiamačių minimumų schemoje

A. Jokimaitis (KTU)

Sakykime, kad $\{X_j = (X_{1,j}, X_{2,j}), j \geq 1\}$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių dvimačių atsitiktinių dydžių (a.d.) seka su bendra pasiskirstymo funkcija $F(x_1, x_2)$. Čia $x = (x_1, x_2)$ – dvimatės Euklido erdvės taškas. Aritmetines operacijas tarp skaitinių vektorių apibrėšime pagal komponentes, o nelygybė $x < y$ reikš nelygybių sistemą $x_i < y_i$ $(i = 1,2)$.

Apibrėšime dvimatį a.d.

$$W_n = (\min(X_{1,1}, \cdots, X_{1,n}), \min(X_{2,1}, \cdots, X_{2,n}))$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo vektorių sekos

$$\{c_n = (c_{1,n}, c_{2,n}), n \geq 1\}, \quad \{d_n = (d_{1,n}, d_{2,n}) > (0,0), n \geq 1\}$$

kad

$$\lim_{n \to \infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) \tag{1}$$

visuose funkcijos $L(x)$ tolydumo taškuose. Čia $L(x)$ – dvimatė neišsigimusi pasiskirstymo funkcija. Būtinos ir pakankamos sąlygos, kurias turi tenkinti pasiskirstymo funkcija $F(x)$, kad būtų tenkinama (1) lygybė, yra suformuluotos A. Marshallo ir I. Olkino darbe [5].

Pažymėkime

$$\overline{F}(x) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x),$$

$$\overline{L}(x) = 1 - L_1(x_1) - L_2(x_2) + L(x),$$

$$z_{1,n}(x_1) = nF_1(c_{1,n} + d_{1,n}x_1),$$

$$z_{2,n}(x_2) = nF_2(c_{2,n} + d_{2,n}x_2),$$

$$z_n(x) = n(1 - \overline{F}(c_n + d_n x)),$$

čia F_1, F_2, L_1, L_2 – vienmatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos.

Turime

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(1 - F_1\left(c_{1,n} + d_{1,n}x_1\right)\right)^n - \lim_{n\to\infty}\left(1 - F_2\left(c_{2,n} + d_{2,n}x_2\right)\right)^n$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\left(\overline{F}(c_n + d_n x)\right)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} e^{-z_{1,n}(x_1)} - \lim_{n\to\infty} e^{-z_{2,n}(x_2)} + \lim_{n\to\infty} e^{-z_n(x)}.$$

Pastebėsime, kad lygybė (1) yra tenkinama tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty} z_{1,n}(x_1) = -\log(1 - L_1(x_1)) := z_1(x_1)$$

visiems x_1 su kuriais $L_1(x_1) < 1$;

$$\lim_{n\to\infty} z_{2,n}(x_2) = -\log(1 - L_2(x_2)) := z_2(x_2)$$

visiems x_2, su kuriais $L_2(x_2) < 1$;

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = -\log \overline{L}(x) := z(x)$$

visiems x, su kuriais $\overline{L}(x) > 0$. Be to

$$L(x) = 1 - e^{-z_1(x)} - e^{-z_2(x_2)} + e^{-z(x)}, \quad L_1(x_1) = 1 - e^{-z_1(x_1)}, L_2(x_2) = 1 - e^{-z_2(x_2)}.$$

Šiame darbe gausime netolygųjį konvergavimo greičio įvertį lygybėje (1). Reikia pažymėti, kad šis įvertis kai kurių skirstinių atveju yra tikslesnis už darbe [3] gautą konvergavimo greičio įvertį. Konvergavimo greitis daugiamačių maksimumų schemoje buvo tirtas E. Omey ir S.T. Rachevo [6], L. de Haano ir L. Pengo [1], M. Maejimos ir S.T. Rachevo [4], o taip pat autoriaus [2] darbuose.

Pažymėkime

$$v_{1,n}(x_1) = z_{1,n}(x_1) - z_1(x_1),$$

$$v_{2,n}(x_2) = z_{2,n}(x_2) - z_2(x_2),$$

$$v_n(x) = z_n(x) - z(x).$$

TEOREMA. *Tarkime, tenkinama lygybė* (1). *Visiems* $x = (x_1, x_2)$, *su kuriais* $|v_{1,n}(x_1)| < 3$, $|v_{2,n}(x_2)| < 3$, $|v_n(x)| < 3$ *teisingas konvergavimo greičio įvertis.*

$$|P(W_n < c_n + d_n x) - L(x)| \le$$

$$\frac{1}{2(n-1)}\left\{z_{1,n}^2(x_1)e^{-z_{1,n}(x_1)} + z_{2,n}^2(x_2)e^{-z_{2,n}(x_2)} + z_n^2(x)e^{-z_n(x)}\right\} +$$

$$+ (1 - L_1(x_1))\left(|v_{1,n}(x_1)| + \frac{v_{1,n}^2(x_1)}{2} \cdot \frac{1}{1 - q_1}\right) +$$

$$+\left(1-L_2(x_2)\right)\left(\left|v_{2,n}(x_2)\right|+\frac{v_{2,n}^2(x_2)}{2}\cdot\frac{1}{1-q_2}\right)+\overline{L}(x)\left(\left|v_n(x)\right|+\frac{v_n^{\,2}(x)}{2}\cdot\frac{1}{1-q_3}\right).$$

Čia $0<q_1,q_2,q_3<1$ *parenkame taip, kad*

$$\frac{\left|v_{1,n}(x_1)\right|}{3}\le q_1,\ \frac{\left|v_{2,n}(x_2)\right|}{3}\le q_2,\ \frac{\left|v_n(x)\right|}{3}\le q_3.$$

Įrodymas. Turime

$$\left|P(W_n<c_n+d_nx)-L(x)\right|\le\left|\left(1-F_1(c_{1,n}+d_{1,n}x_1)\right)^n-\left(1-L_1(x_1)\right)\right|+$$

$$+\left|\left(1-F_2(c_{2,n}+d_{2,n}x_2)\right)^n-\left(1-L_2(x_2)\right)\right|+\left|\left(\overline{F}(c_n+d_nx)\right)^n-\overline{L}(x)\right|. \tag{2}$$

Įvertinsime pirmąjį nelygybės (2) dešiniosios pusės dėmenį. Turime

$$\left|\left(1-F_1(c_{1,n}+d_{1,n}x_1)\right)^n-\left(1-L_1(x_1)\right)\right|\le\left|\left(1-F_1(c_{1,n}+d_{1,n}x_1)\right)^n-e^{-z_{1,n}(x_1)}\right|+$$

$$+\left|e^{-z_{1,n}(x_1)}-\left(1-L_1(x_1)\right)\right|. \tag{3}$$

Dabar įvertinsime pirmąjį nelygybės (3) dešiniosios pusės dėmenį. Turime

$$\left|\left(1-F_1(c_{1,n}+d_{1,n}x_1)\right)^n-e^{-z_{1,n}(x_1)}\right|=\left|\left(1-\frac{z_{1,n}(x_1)}{n}\right)^n-e^{-z_{1,n}(x_1)}\right|.$$

Kadangi $0\le z_{1,n}(x_1)\le n$, tai iš nelygybės

$$e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\le\frac{x^2e^{-x}}{2(n-1)}\quad(0\le x\le n)$$

išplaukia, kad

$$\left|\left(1-\frac{z_{1,n}(x_1)}{n}\right)^n-e^{-z_{1,n}(x_1)}\right|\le\frac{z_{1,n}^2(x_1)e^{-z_{1,n}(x_1)}}{2(n-1)}. \tag{4}$$

Toliau turime

$$\left|e^{-z_{1,n}(x_1)}-\left(1-L_1(x_1)\right)\right|=\left|e^{-z_{1,n}(x_1)}-e^{-z_1(x_1)}\right|.$$

Taikydami nelygybę

$$\left|e^{-y}-e^{-x}\right| \le e^{-x}\left(|x-y|+\frac{(x-y)^2}{2}\cdot\frac{1}{1-q}\right), |x-y|/3 \le q < 1,$$

gauname

$$\left|e^{-z_{1,n}(x_1)}-(1-L_1(x_1))\right| \le (1-L_1(x_1))\left(|v_{1,n}(x_1)|+\frac{v_{1,n}^2(x_1)}{2}\cdot\frac{1}{1-q_1}\right), \tag{5}$$

čia $|v_{1,n}(x_1)|/3 \le q_1 < 1$.

Atsižvelgę į nelygybes (4) ir (5), iš nelygybės (3) gauname

$$\left|(1-F_1(c_{1,n}+d_{1,n}x_1))^n-(1-L_1(x_1))\right| \le$$

$$\frac{z_{1,n}^2(x_1)e^{-z_{1,n}(x_1)}}{2(n-1)}+(1-L_1(x_1))\left(|v_{1,n}(x_1)|+\frac{v_{1,n}^2(x_1)}{2}\cdot\frac{1}{1-q_1}\right). \tag{6}$$

Analogiškai gauname

$$\left|(1-F_2(c_{2,n}+d_{2,n}x_2))^n-(1-L_2(x_2))\right| \le \frac{z_{2,n}^2(x_2)e^{-z_{2,n}(x_2)}}{2(n-1)}+$$

$$+(1-L_2(x_2))\left(|v_{2,n}(x_2)|+\frac{v_{2,n}(x_2)}{2}\cdot\frac{1}{1-q_2}\right), \tag{7}$$

čia $|v_{2,n}(x_2)|/3 \le q_2 < 1$,

$$\left|(\overline{F}(c_n+d_nx))^n-\overline{L}(x)\right| \le \frac{z_n^2(x)e^{-z_n(x)}}{2(n-1)}+\overline{L}(x)\left(|v_n(x)|+\frac{v_n^2(x)}{2}\cdot\frac{1}{1-q_3}\right) \tag{8}$$

čia $|v_n(x)|/3 \le q_3 < 1$.

Atsižvelgę į nelygybes (6), (7) ir (8), iš nelygybės (2) gauname teoremos įvertį. Teorema įrodyta.

LITERATŪRA

[1] L. de Haan, L. Peng, Rates of convergence for bivariate extremes, *J. Mult. Anal.*,**61**(1997), 195–230.

[2] A. Jokimaitis, Die Konvergenzgeschwindigkeit der Verteilung des Maximums der Zufallsvektoren, *Liet.Mat.Rink.*, **32**(1992), 229–236.

[3] A. Jokimaitis, Atsitiktinių vektorių minimumo pasiskirstymo konvergavimo greitis, *Matematika. Respublikinės konferencijos medžiaga*, Technologija, Kaunas, 1994, p.36–39

[4] M. Maejima, S.T. Rachev, Rate of convergence in the multivariate max–stable limit theorem, *Statist. Probab. Lett.*, **32**(1997), 115–123.

[5] A. W. Marshall, I. Olkin, Domains of attraction of multivariate extreme value distributions, *Ann. Probab.*, **11**(1983), 168–177.

[6] E. Omey, S.T. Rachev, Rate of convergence in multivariate extreme value theory, *J. Mult. Anal.*,**38**(1991), 36–50.

The estimate of convergence rate in the min–schema of multivariate random variables

A. Jokimaitis

In this paper the nonuniform estimate of the convergence rate for the distribution of the minima of multivariate random variable is obtained.