

О преобразовании Хеллингера

Вайдотас Канишаускас (ШУ)

Преобразование Хеллингера широко используется в статистике случайных процессов [1], [2]. Особое место при этом занимает представления преобразования Хеллингера. В настоящей работе получено нетрадиционное представление преобразования Хеллингера, т.е. без использования процесса Хеллингера. Эта работа является обобщением результатов автора полученных в статье [3].

В первом параграфе доказан основной результат, во втором и третьем – этот результат применяется для мультивариантных точечных процессов и процессов восстановления.

1. Основной результат

Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ определено семейство вероятностных мер $\mathcal{P} = \{P_j, j = 1, \dots, k\}$. Преобразованием Хеллингера относительно мер $\mathcal{P}$ называется функция

$$H(\alpha; \mathcal{P}) = \mathbb{E}_Q \left[\prod_{j=1}^k \left(\frac{dP_j}{dQ} \right)^{\alpha_j} \right],$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \quad 0 < \alpha_j < 1, \quad \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1,$$

независящая от Q , где мера Q такая, что $P_j \ll Q$, $j = 1, \dots, k$, и $\mathbb{E}_Q$ обозначает математическое ожидание относительно меры Q .

Пусть $(E, \mathcal{E})$ – пространство Блэкуэлла, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, Q)$ – стохастический базис, $\mathcal{P} = \{P_j, j = 1, \dots, k\}$ семейство вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, μ – целочисленная случайная мера на $(R_+ \times E, \mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{E})$ с $(Q, \mathbb{F})$ – компенсатором ν таким, что $\nu(\{t\} \times E) \equiv 0$.

Введем условия:

A1. Вероятностные меры P_j , $j = 1, \dots, k$ такие, что при каждом $t \geq 0$

$$P_j^t \sim Q^t \quad (P_j^t = P_j|_{\mathcal{F}_t}),$$

и процесс локальной плотности имеет вид

$$Z_j^t = \frac{dP_j^t}{dQ^t} = \varepsilon_t((V_j - 1) * (\mu - \nu)), \quad j = 1, \dots, k, \quad t \geq 0,$$

где $\mathcal{E}_t(\cdot)$ – стохастическая экспонента, V_j строго положительные $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{E}$ – измеримые функции такие, что для всех $t \in R_+$, $j = 1, \dots, k$

$$(1 - \sqrt{V_j})^2 * \nu_t < \infty \quad Q - \text{п.н.}$$

Здесь использовали сокращение $g * \mu_t = \int_0^t \int_E g(s, x) \mu(ds, dx)$.

A2. Пусть для каждого $t \in R_+$, Q -п.н.

$$\left| \sum_{j=1}^k \alpha_j V_j - 1 \right| * \nu_t < \infty.$$

Замечание 1. Заметим, что в силу неравенства $c_1(1 - \sqrt{1+x})^2 \leq |x|^2/(1+|x|) \leq c_2(1 - \sqrt{1+x})^2$, $x \geq -1$, где c_1 и c_2 некоторые постоянные, условие A2 эквивалентно условию:

$$A2' \quad \left(1 - \sqrt{\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j} \right)^2 * \nu_t < \infty \quad Q - \text{п.н.}, \quad t \in R_+.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия A1, A2. Тогда

$$H(\alpha; \mathcal{P}^t) = \mathbb{E}_Q \left[e^{-d(\alpha; \mathcal{P})(t)} \mathcal{E}_t(M(\alpha; \mathcal{P})) \right], \quad (1)$$

где

$$d(\alpha; \mathcal{P})(t) = \ln \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j}{\prod_{j=1}^k V_j^\alpha} * \mu_t, \quad (2)$$

$$M(\alpha; \mathcal{P})(t) = \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j - 1 \right) * (\mu - \nu)_t. \quad (3)$$

Доказательство. Применяя формулу стохастической экспоненты [1], имеем

$$Z_j^t = \mathcal{E}_t((V_j - 1) * (\mu - \nu)) = \exp\{(V_j - 1) * (\mu - \nu)_t + (\ln V_j - V_j + 1) * \mu_t\}.$$

В силу этого, после элементарных вычислений, получаем

$$\prod_{j=1}^k (Z_j^t)^{\alpha_j} = e^{-d(\alpha; \mathcal{P})(t)} \mathcal{E}_t(M(\alpha; \mathcal{P})),$$

где стохастические интегралы $M(\alpha; \mathcal{P})(t)$ и $\mathcal{E}_t(M(\alpha; \mathcal{P}))$ определены в силу условия A2. Также из условия A2 и неравенств

$$\prod_{j=1}^k y_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j,$$

где $y_j > 0$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, \dots, k$, $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$,

$$\ln y \leq |y - 1|, \quad y > 0$$

следует, что для каждого $t \in R_+$

$$d(\alpha; \mathcal{P})(t) < \infty \quad Q - \text{п.н.}$$

Теперь утверждение теоремы следует из определения $H(\alpha; \mathcal{P}^t)$.

Теорема доказана.

2. Мультивариантный точечный процесс

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ с пространством Блэкуэлла $(E, \mathcal{E})$ задан мультивариантный точечный процесс (T_n, X_n) , $n \geq 1$, целочисленная случайная мера которого

$$\mu([0, t] \times \Gamma) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}(T_n \leq t) \mathbb{I}(X_n \in \Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0$$

имеет $(P_\theta, \mathbb{F})$ – компенсатор вида

$$v_t(\theta, \Gamma) = \int_0^t \int_{\Gamma} h_s(\theta, x) g_s(dx) ds, \quad \theta \in \Theta,$$

где $h_s(\theta, x) - P(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{E}$ – измеримая строго положительная функция.

Пусть другая мера $Q(\alpha; \theta)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, $\theta_j \in \Theta$, $j = 1, \dots, k$ определена на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ так, чтобы мера μ процесса (T_n, X_n) , $n \geq 1$ имела $(Q(\alpha; \theta), \mathbb{F})$ – компенсатор вида

$$v_t(\alpha; \theta; \Gamma) = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_t(\theta_j; \Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{E}, \quad t \in R_+.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $P_{\theta_j}^t \sim P_{\theta_1}^t$, $j = 2, \dots, k$, $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta$, $t \in R_+$. Тогда интеграл Хеллингера $H(\alpha; \mathcal{P}_\theta^t)$ имеет представление

$$H(\alpha; \mathcal{P}_\theta^t) = \mathbb{E}_{Q(\alpha; \theta)}, \exp\{-d(\alpha; \mathcal{P}_\theta)(t)\},$$

где

$$d(\alpha; P_\theta)(t) = \ln \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j h(\theta_j)}{\prod_{j=1}^k h^{\alpha_j}(\theta_j)} * \mu_t.$$

Доказательство. В силу теоремы 1, достаточно показать, что выполнены условия A1, A2 при $Q = Q(\alpha; \theta)$.

В силу условий теоремы, линейной зависимости и непрерывности компенсаторов $v_t(\alpha; \theta; \Gamma)$, $v_t(\theta_j; \Gamma)$, $j = 1, \dots, k$, $\Gamma \in \mathcal{E}$, $t \in R_+$, следует, что для каждого $t \in R_+$ P_{θ_i} -п.н. $i = 1, \dots, k$ и $Q(\alpha; \theta)$ -п.н.

$$v_t(\alpha, \theta, E) < \infty, \quad v_t(\theta_j; E) < \infty, \quad j = 1, \dots, k.$$

Поэтому [4] $P_{\theta_j}^t \sim Q^t(\alpha; \theta)$, $\theta_j \in \Theta$, $t \in R_+$, $j = 1, \dots, k$, и для каждого $t \in R_+$ $Q(\alpha; \theta)$ -п.н.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \sqrt{V_j(\alpha; \theta)}\right)^2 * v(\alpha; \theta)_t < \infty, \quad j = 1, \dots, k, \\ & \left(1 - \sqrt{\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j(\alpha; \theta)}\right)^2 * v(\alpha; \theta)_t < \infty, \end{aligned}$$

где $V_j(\alpha; \theta) = dv(\theta_j)/dv(\alpha; \theta)$.

Выполнены условия A1, A2. Теорема доказана.

Следствие. Если $h_s(\theta, x) = \theta \varphi(s, x)$, $\theta > 0$ тогда

$$H(\alpha; P_\theta^t) = \mathbb{E}_{Q(\alpha; \theta)} \exp \left\{ - \ln \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j}{\prod_{j=1}^k \theta_j^{\alpha_j}} \mu([0, t] \times E) \right\},$$

где $Q(\alpha, \theta) = P_{\theta(\alpha)}$, $\theta(\alpha) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j$.

3. Процесс восстановления

Пусть $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}(T_n \leq t)$, $t \geq 0$ процесс восстановления с моментами восстановления $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, ($T_0 = 0$), функции распределения которых имеет вид

$$P_\theta(\tau_1 \leq t) = F(\theta, t) = 1 - e^{-\theta \psi t}, \quad \theta \in \Theta = (0, \infty).$$

Тогда из теоремы 2 следует, что

$$H(\alpha, \mathcal{P}_\theta^t) = \mathbb{E}_{\theta(\alpha)} \exp \left\{ - \ln \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j}{\prod_{j=1}^k \theta_j^{\alpha_j}} N_t \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, $\theta_j \in \Theta$, $j = 1, \dots, k$, $\theta(\alpha) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j$, $t \in R_+$. Из этого представления вытекает следующий полезный результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть существует постоянная $\lambda > 0$ такая, что

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}_{\theta(\alpha)} e^{\lambda \tau_1} < \infty.$$

Тогда для каждого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$ и $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, $\theta_i \in \Theta$ существует предел

$$c(\alpha; \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln H(\alpha; \mathcal{P}_\theta^t) = - \frac{g(\alpha; \theta)}{a(\alpha; \theta)}, \quad (4)$$

где

$$g(\alpha; \theta) = \ln \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j}{\prod_{j=1}^k \theta_j^{\alpha_j}}, \quad 0 < a(\alpha; \theta) = \mathbb{E}_{\theta(\alpha)} \tau_1.$$

Теорема 3 доказывается также как и теорема 6 [3].

Следствие. Пусть

$$P_\theta(\tau_1 \leq t) = 1 - \exp \left\{ -\theta \int_0^t s^{\gamma-1} ds \right\},$$

где $\gamma < 1$, а θ – неизвестной положительный параметр. Тогда имеет место соотношение (4), в котором

$$a(\alpha; \theta) = \frac{\gamma^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)}{\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j \right)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

где $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. Liese and I. Vajda, *Convex Statistical Distances*, Teubner – *Texte zur Mathematik*, **95** (1987),
- [2] B. Grigelionis, *On Hellinger transforms for solutions of martingale problems*, *Stochastic Processes, A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur*, S. Cambanis et al. (Eds), Springer-Verlag, New York, 1993, 107–116.
- [3] В. Канишаускас, Асимптотически минимаксное различение двух простых гипотез, *Liet. Matem. Rink.*, **38** (1998), 169–184.
- [4] Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных распределений, II, *Матем. сб.*, **108** (1978), 32–61.

Apie Helingerio transformaciją

V. Kaniškauskas (ŠU)

Gauta nauja Helingerio transformacijos išraiška.