Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
65 tomas, 2024, 45–75
https://doi.org/10.15388/LMR.2024.38090

Geometrinės transformacijos mokyklinėje matematikoje

Rimas Norvaiša

Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
El. paštas: rimas.norvaisa@mif.vu.lt

Įteiktas 2024 rugpiūčio 15; publikuotas 2024 gruodžio 10

Santrauka. Straipsnyje gilinamasi į Hung-Hsi Wu sukurtą mokyklinės geometrijos mokymosi trajektoriją pagrįstą transformacijomis. Nagrinėjamos lygiagretaus postūmio, atspindžio, sukinio ir dilatacijos plokštumos transformacijos. Jų pagalba įrodomi trikampių kongruencijos ir trikampių panašumo požymiai bei kvadratinės funkcijos grafiko savybės. Formuluojamos naudojamą sąvokų sistemą pagrindžiančios mokyklinės geometrijos aksiomos. Tyrimą paskatino geometrijos temos dėstymas 2022 m. patvirtintoje matematikos programoje ir jau publikuotuose vadovėliuose.

Raktiniai žodžiai: geometrinė transformacija; kongruencija; dilatacija; mokyklinės geometrijos aksiomos
AMS: 97G50

Įvadas

Amerikiečių matematikas H.-H. Wu yra parengęs visas 12 klasių apimantį ir matematiniu samprotavimu grįstą mokyklinės matematikos turinį. Jis yra suderintas su 2010 metais priimta amerikiečių matematikos programa CCSSM. Siekiame parodyti, kad Wu parengtas mokyklinės matematikos turinys sprendžia problemas, kurios būdingos mūsų mokyklinei matematikai. Praėjusių metų LMD konferencijoje aptarėme trupmenų mokymo problemas ir kaip jos sprendžiamos H.-H. Wu mokyklinėje matematikoje [6]. Šiame straipsnyje adaptuojame šio mokyklinės matematikos turinio dalį skirtą geometrijos mokymosi trajektorijai [10, 4 skyrius] ir [14, 4 ir 5 skyriai]. Mokymosi trajektorija (angl. learning progression) yra loginiu nuoseklumu grindžiamas sąvokų, turinio ir gebėjimų išdėstymas. Taip išdėstytas mokyklinės matematikos turinys naudingas mokytojų studijoms, vadovėlių autoriams, matematikos programos rengėjams.

Kokios geometrijos temos mokomos Lietuvoje pastaruoju metu? 2022 m. patvirtinta matematikos programa numato nuo pirmosios klasės nagrinėti geometrines transformacijas. Pirmose keturiose klasėse siūloma mokyti nustatyti objekto padėtį, apibūdinti objekto judėjimą ir supažindinti su figūrų simetrija. Penktoje klasėje apibrėžiamos transformacijos: simetrija tiesės atžvilgiu (atspindys), centrinė simetrija, posūkis ir postūmis. Šeštoje klasėje programa siūlo aptarti objekto vaizdo „didinimą ir mažinimą“ nagrinėjant praktinius pavyzdžius, bei *matematiškai apibrėžti* figūrų panašumą. Trikampių ir keturkampių panašumas turėtų būti tyrinėjamas įsitikinant atitinkamų kampų ir atitinkamų kraštinių santykių lygybėmis. Pagal programą, septintoje klasėje turėtų būti mokomasi *figūrų lygumą ir panašumą pagrįsti nurodant transformacijų seką*. Nuo aštuntos klasės, pagal programą, transformacijų nagrinėjimas siejamas su skaitmeninių priemonių naudojimu. Skaitmeninių priemonių pagalba taikant transformacijas devintoje klasėje tyrinėjami tiesinės ir kvadratinės funkcijų grafikai. Transformacijos terminas dar kartą pasirodo venuoliktoje klasėje skaitmeninių priemonių pagalba tyrinėjant funkcijos grafiko priklausomybes nuo parametro. Geometrinių figūrų savybių įrodinėjimas programoje numatytas, bet nėra pakankamai aiškiai siejamas su geometrinėmis transformacijomis.

Ši geometrijos temos 2022 m. matematikos programoje apžvalga rodo, kad plokštumos transformacijoms skiriama daug dėmesio nuo pirmos klasės. Kursyvu pažymėtos frazės rodo, kad pačios transformacijos turėtų būti traktuojamos matematiškai tiksliai ir naudojamos pagrįsti kitas geometrinių objektų savybes. Vėliau transformacijas rekomenduojama naudoti kartu su skaitmeninėmis priemonėmis iliustruojant geometrinių objektų savybes, pavyzdžiui, kvadratinės funkcijos. Išskirsime keletą kitų geometrijos mokymo ypatybių. Transformacijų apibūdinimas programoje ir nauji penktos klasės vadovėliai rodo didelį dėmesį skiriant simetrijai ir jos pavyzdžiams gyvenamoje aplinkoje. Kita vertus, simetrija siejama tik su atspindžiu ir su posūkiu atliekamu 180° kampu, ignoruojant kito dydžio kampus ir postūmį [5, 90 ir 96 pp.] vadovėlyje posūkis ir postūmis yra visoje plokštumoje apibrėžti judesiai turintys izometrijos savybę. Tuo tarpu [8, 11 ir 28 pp.] vadovėlyje posūkis, postūmis ir simetriškos figūros vaizdavimas yra tik figūros pertvarkymai, vadinami figūros transformacijomis. Šie ir kiti transformacijų traktavimo skirtumai penktos klasės vadovėliuose gali sukelti sunkumų naudojant juos geometrinių objektų savybių įrodinėjimams. Galima įtarti, kad geometrinių transformacijų naudojimas mokykloje praranda matematinį pagrindą, kuriuo anksčiau buvo Hilberto aksiomų sistema [1, 1 Priedas]. Išsamesnė dabartinių ir ankstesnių metų vadovėlių apžvalga geometrinių transformacijų požiūriu yra metodinėje medžiagoje [7].

H.-H. Wu siūloma plokštumos geometrijos mokymosi trajektorija yra pagrįsta jo paties sukurta aksiomų sistema, kuri taip pat yra integralia viso mokyklinės matematikos turinio dalimi [10, 4 skyrius], [14, 4 ir 5 skyriai] ir [7]. Ji skiriasi nuo Hilberto aksiomomis grįstos plokštumos geometrijos, kurioje „kongruentumas“ apibrėžiamas netiesiogiai, aksiomų grupe [4, 29 paragrafas]. Pagal H.-H. Wu plokštumos transformacija yra funkcija. Geometrinės transformacijos (GT) mokymosi trajektoriją sudaro dvi dalys: eksperimentinė geometrija (1–8 klasės) ir įrodymais grįsta geometrija (9–12 klasės). Pirmąja dalimi siekiama lavinti geometrinę intuiciją, su matematinėmis sąvokomis supažindinant nuosekliai. Antroji dalis grindžiama anksčiau paaiškintų geometrinių objektų savybių įrodinėjimu naudojant GT. Taip siekiama geometrinės intuicijos ir geometrinio samprotavimo lavinimą padaryti prieinamu matematikos mokytojams ir visiems mokyklinio amžiaus vaikams.

Atsižvelgiant į naujuose penktos klasės vadovėliuose pastebėtus matematinio tikslumo trūkumus traktuojant GT, straipsnyje atsakoma į klausimą:

> Kaip mokymosi požiūriu nuosekliai ir matematiniu atžvilgiu taisyklingai išdėstyti GT sąvokų sistemą pagrindžiančią trikampių kongruencijos ir trikampių panašumo požymius, bei paaiškinančius kvadratinės funkcijos grafiko savybes, t. y. kaip parengti transformacijomis grįstą geometrijos mokymosi trajektoriją?

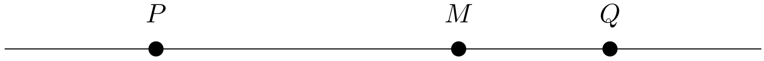
Aptarsime tris pagrindines izometrijas (lygiagretusis postūmis, atspindys tiesės atžvilgiu ir posūkis aplink tašką) bei dilataciją (ištempis/sąspūdis). Aptarsime dvi geometrinių transformacijų taikymų sritis: trikampių kongruentumas ir panašumas, bei kvadratinės funkcijos grafikų transformacijas. Straipsnio gale, 10 skyrelyje, yra H.-H Wu aksiomų rinkinys pakankamas įrodyti visus standartinius mokyklinės plokštumos geometrijos teiginius.

1 Pagrindinės sąvokos

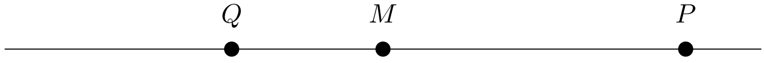
Geometrinė transformacija (GT) F yra taisyklė, kuri nurodo kaip kiekvienam plokštumos taškui P priskiriamas vienintelis plokštumos taškas $F(P)$. GT yra matematinė sąvoka, kurios pagalba suteikiama tiksli prasmė tam, kas vaizdingai kalbant vadinama taškų ir figūrų stumdymu ar perkėlimu plokštumoje, nepriklausomai nuo to išsaugoma figūrų forma, ar ne.

Siekdami intuityvaus supratimo negalime aukoti tikslumo aptardami pagrindines geometrijos sąvokas atkarpa, tiesė, kampas. Tiksliau matematiniu požiūriu šios sąvokos formuluojamos aštuoniomis aksiomomis 10 skyriuje.

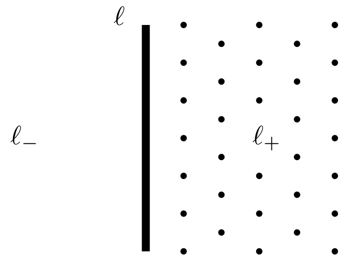
Turėdami du taškus P ir Q, (vienintelę) tiesę, kuriai jie priklauso, žymėsime simboliu L_{PQ}. Ši tiesė yra begalinė abiem kryptimis. Joje neturi prasmės frazės „P yra kairėje nuo Q“ arba „P yra kairėje nuo Q“, nes visa tai priklauso nuo mūsų padėties tiesės atžvilgiu. Tačiau visada turės prasmę sakyti, kad tiesėje L_{PQ} esantis taškas yra „tarp P ir Q“. Jei tiesę L_{PQ} paversime skaičių tiese ir joje $P < Q$ kaip skaičiai, tai taškas M yra tarp P ir Q, kai $P < M < Q$. Geometrinę tiesę paversti skaičių tiese įgalina A3 aksioma. Kita vertus, jei tiesę L_{PQ} paversime skaičių tiese taip, kad



būtų teisinga skaičių nelygybė $Q < P$, tai tas pats taškas M atsidurs tarp Q ir P: $Q < M < P$. Galiausiai sakome, kad plokštumos taškas M yra *tarp* P ir Q, jei M

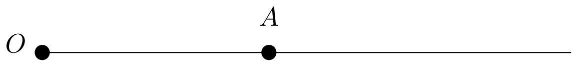


priklauso tiesei L_{PQ} ir jei, kai L_{PQ} paverčiame skaičių tiese, galioja arba $P < M < Q$, arba $Q < M < P$. Galima įrodyti, kad tik viena iš dviejų dvigubų nelygybių galioja tuo pačiu metu ir todėl sąvoka *tarp* yra korektiškai apibrėžta. Pagal apibrėžimą, *atkarpa* PQ yra aibė visų plokštumos taškų, kurie yra tarp P ir Q, įskaitant ir pačius taškus P ir Q. Taip pat sakome, kad taškai P ir Q yra atkarpos PQ galais.

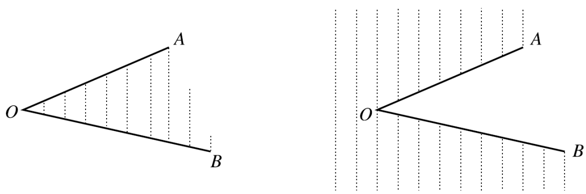


Prieš apibrėžiant kampą reikalinga susitarti dėl pusplokštumės ir spindulio sampratų. Tarkime, kad ℓ yra tiesė plokštumoje. Intuityviai suprantama, kad tiesė plokštumą dalo į dvi dalis, kurias žymėsime ℓ_+ ir ℓ_-; kiekvieną jų vadinsime *pusplokštume*. Tikslumo dėlei, pagal apibrėžimą, abiems tiesės ℓ pusplokštumėms nepriklauso pati ℓ. Abi pusplokštumės ℓ_+ ir ℓ_- nesikerta (neturi bendrų taškų). Kiekviena tiesės ℓ pusplokštumė kartu su pačia ℓ vadinama *uždarąja pusplokštume*. Abiejų uždarųjų pusplokštumių sankirta yra tiesė ℓ.

Spinduliu vadinama pustiesė, kurios pradžios taškas vadinamas viršūne. Spindulys, kurio viršūnės taškas yra O ir jam priklauso kitas taškas A, žymimas simboliu R_{OA}.

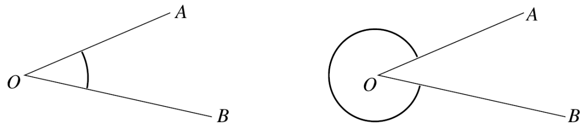


Pagal apibrėžimą, *kampas* yra plokštumos sritis (angl. region), kurios kraštą (angl. boundary) sudaro du spinduliai R_{OA} ir R_{OB} su bendra viršūne O; R_{OA} ir R_{OB} vadinami kampo *kraštinėmis* ir O vadinamas kampo *viršūne*. Toks kampas žymimas simboliu $\angle AOB$ arba simboliu $\angle O$ jei nėra supainiojimo pavojaus. Vis tik kampas $\angle AOB$ turi dviprasmybę, nes, jei taškai A, O, B nėra vienoje tiesėje, tai spinduliai R_{OA} ir R_{OB} sudaro du kampus, kurie pavaizduoti 1 piešinyje užbrūkšniuotomis sritimis.



1 pav. Kampo $\angle AOB$ dviprasmiškumas.

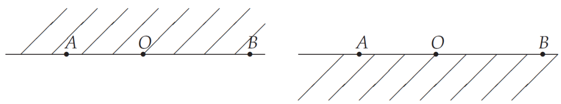
Paprastai sutariama, kad kampu $\angle AOB$ laikomas 1 piešinio kairėje esantis kampas arba „mažesnysis“ kampas. Apibrėšime jį vienareikšmiškai tokiu būdu. Kadangi taškas B nepriklauso tiesei L_{OA}, jis priklauso vienai iš dviejų šios tiesės pusplokštumių. Panašiai vienintyele yra tiesės L_{OB} pusplokštumė, kuriai priklauso taškas A. Tada, pagal apibrėžimą, kairysis kampas 1 piešinyje yra dviejų puplokštumių sankirta: L_{OA} uždarosios pusplokštumės, kuriai priklauso taškas B, ir L_{OB} uždarosios pusplokštumės, kuriai priklauso taškas A.



2 pav. Kampų žymėjimas lankeliu.

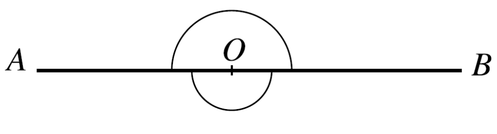
Toks pedantiškumas apibrėžiant kampą yra reikalingas tais atvejais, kai jis dalyvauja teoremų įrodymuose. Tokie įrodymai paprastai pasirodo mokyklos vyresnėse klasėse. Tuo tarpu pradinės ir pagrindinės mokyklos klasėse, kur tik pradedama geometrijos mokytis eksperimentuojant ir intuityviai, kampus galima identifikuoti paprasčiau naudojant žymėjimui lankelius kaip parodyta 2 piešinyje.

Kai taškai A, O, B yra kolinearūs (randasi vienoje tiesėje), kampu $\angle AOB$ gali būti laikoma bet kuri iš dviejų tiesės L_{AB} uždarųjų pustiesių. Šiuo atveju kampas $\angle AOB$ vadinamas *ištiestiniu* (žr. 3 pav.).



3 pav. Ištiestiniai kampai.

Kuris iš dviejų galimų ištiestinių kampų turimas galvoja nurodoma taip pat naudojant lankelį kaip parodyta 4 paveikslėlyje.



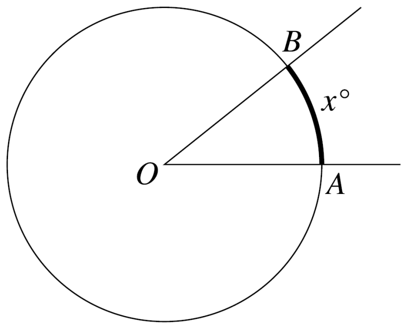
4 pav. Ištiestinių kampų žymėjimas lankeliu.

Intuityviai atrodo, kad abu ištiestiniai kampai yra vienodi. 3 skyrelio gale, nagrinėdami atspindžio transformaciją atžvilgiu L_{AB}, šiam požiūriui suteikiame tikslią prasmę.

Dabar jau pasiruošę apibrėžti kampo didumo matavimą laipsniais. *Vienetiniu apskritimu* vadiname apskritimą, kurio spindulys 1. Daliname vienetinį apskritimą į 360 vienodo ilgio dalių, trumpai tariant 360 *lygių dalių*. Vienos dalies ilgis vadinamas *vienu laipsniu*. Vieną laipsnį galima toliau dalinti į n lygių dalių gaunant $\frac{1}{n}$-tąją laipsnio. Tai lygiai tas pats, kaip vienetinio intervalo skaičių tiesėje dalinimas į lygias dalis gaunant trupmenas, tik šiuo atveju turime „apskritą skaičių tiesę“. Viena susijusi apskritimo dalis vadinama *lanku*.

Turėdami kampą $\angle AOB$ su viršūne O, apibrėšime jo didumą laipsniais. Tegul $\mathcal{C}$ yra vienetinis apskritimas su centru O. Būdamas plokštumos sritimi, kampas $\angle AOB$

kertasi su $\mathcal{C}$ lanku (5 paveikslėlyje pajuodinta linija). Galime tarti, kad taškai A ir B guli ant apskritimo.



5 pav. Kampo didumas laipsniais.

5 paveikslėlyje taškas B yra kryptimi prieš laikrodžio rodyklę nuo taško A. „Apskritoje skaičių tiesėje“ nuliumi pasirinkime tašką A. Kadangi kampui $\angle AOB$ kertantis su apskritimu gaunamas lankas guli kryptimi prieš laikrodžio rodyklę nuo taško A, 1 laipsnį atitinkantį tašką ant apskritimo pasirenkame kryptimi prieš laikrodžio rodyklę nuo taško A ir jis tampa šios „apskritos skaičių tiesės“ vienetu 1. Vienetinio apskritimo taškai atitinkantys laipsnius $1, 2, 3, \dots, 359, 360$ išsidėsto kryptimi prieš laikrodžio rodyklę aplink centrą, kol 360 laipsnių sutampa su tašku A, kuris yra 0. Tarkime, kad x yra taško B skaitinė reikšmė ant šios „apskritos skaičių tiesės“. Tada sakome, kad kampo $\angle AOB$ dydis yra x° arba kampas $\angle AOB$ turi x°, o simboliu rašome $|\angle AOB| = x^\circ$. Sakome, kad *du kampai yra lygūs*, jei jų didumai laipsniais yra lygūs.

Plokštumos *izometrija* yra GT, kuri nekeičia atstumo tarp taškų.[2] Kalbant plačiau galima sakyti, kad izometrija F yra tokia GT, kurios atžvilgiu, su bet kuriais dviem taškais P ir Q, atstumas tarp jų vaizdų $F(P)$ ir $F(Q)$ yra lygus atstumui tarp P ir Q.

Pagrindinėmis izometrijomis yra:

(a) postūmis vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ kryptimi arba lygiagretusis postūmis;

(b) atspindys tiesės atžvilgiu;

(c) sukinys aplink tašką.

Kiekviena pagrindinė izometrija yra GT. Vėliau parodysime, kad pagrindinės izometrijos yra izometrijomis čia apibrėžta prasme. Dar daugiau, teisingas sekantis teiginys [12, 250 p.].

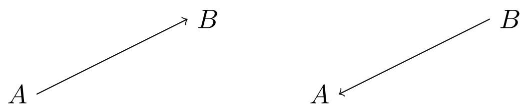
1 teorema. *Kiekviena plokštumos izometrija yra baigtinio skaičiaus pagrindinių izometrijų kompozicija, t. y. kongruencija.*

[2] Žodelis „izo“ reiškia lygu, o žodelis „metrija“ maždaug reiškia matavimo veiksmą. Tai matematinis terminas. Kartais vietoje jo naudojama frazė *standus judesys* (angl. rigid motion).

2 Lygiagretusis postūmis

Tai paprasčiausia tarp pagrindinių izometrijų, nors matematine prasme tikslus transformacijos krypties sąvokos apibūdinimas reikalauja pastangų. Net ir tuo atveju, kai aukojame tikslumą intuityviam supratimui. Turime galvoje vektoriaus sąvokos apibūdinimą.

Plokštumos vektoriumi $\overrightarrow{AB}$ laikome atkarpą AB kuriame pirmasis taškas A visada nurodo *pradžios tašką*, o antrasis taškas B nurodo *galinį tašką*. Todėl vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$ yra skirtingi nors abiem bendra ta pati atkarpa AB. Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgiu vadiname atkarpos AB ilgį. Norėdami vektorių $\overrightarrow{AB}$ pavaizduoti piešiniu, galiniame taške B uždedame strėlę vaizduojančią kryptį iš A į B. Šiuo būdu 6 paveikslėlyje pavaizduoti vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$.



6 pav. Vektoriai iš A į B ir iš B į A.

Tarkime, kad $\overrightarrow{AB}$ yra vektorius plokštumoje. Apibrėšime postūmį išilgai $\overrightarrow{AB}$ arba postūmį iš A į B. Tegul L_{AB} yra tiesė jungianti taškus A ir B. *Postūmiu iš A į B* vadinama taisyklė, tam tikru būdu visus plokštumos taškus atvaizduojanti į kitus tos pačios plokštumos taškus. Būtent, plokštumos taškas P yra atvaizduojamas į plokštumos tašką Q taip, kad galioja savybės (i), (ii) ir (iii):

- (i) Jei P yra tiesėje L_{AB}, tai Q taip pat yra tiesėje L_{AB}; jei P nėra tiesėje L_{AB}, tai atkarpa PQ yra lygiagreti atkarpai AB.
- (ii) Atkarpos PQ ilgis yra lygus atkarpos AB ilgiui.
- (iii) Vektoriai $\overrightarrow{PQ}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra tos pačios krypties.

Paprastai postūmį žymėsime raide T arba, jei reikalinga, simbolis T_{AB} žymės postūmį iš A į B.

Tegul T yra postūmis išilgai vektoriaus $\overrightarrow{AB}$. Jei transformacija T taškas P atvaizduojamas į tašką Q, tai $T(P) = Q$ ir Q paprastai vadinamas pastūmtu P vaizdu kai suprantama koks T turimas galvoje. Taip pat sakoma, kad T atvaizduoja P į Q. Jei $\mathcal{S}$ yra plokštumos geometrinė figūra, tai, kaip buvo sakyta, $T(\mathcal{S})$ yra visų $\mathcal{S}$ taškų vaizdų visuma; paprastai ši visuma vadinama pastūmtu $\mathcal{S}$ vaizdu. Taip pat sakoma, kad T atvaizduoja $\mathcal{S}$ į $T(\mathcal{S})$.

Toliau apibrėšime postūmio simetrijos sąvoką, kuriai reikalinga figūrų lygybės sąvoka. Atkreipsime dėmesį į tai, kad vadovėliuose figūrų lygybei suteikiama kita reikšmė – figūrų kongruentumas, o figūrų lygybė vadinama tapatumu. Tarkime, kad $\mathcal{S}$ ir $\mathcal{S}'$ yra dvi plokštumos geometrinės figūros. Sakome, kad $\mathcal{S}$ ir $\mathcal{S}'$ yra lygios geometrinės figūros, rašome $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, jei teisingi kiti du teiginiai:

1. kiekvienas $\mathcal{S}$ taškas P taip pat yra $\mathcal{S}'$ taškas ir
2. kiekvienas $\mathcal{S}'$ taškas Q taip pat yra $\mathcal{S}$ taškas.

Figūrų lygybės sąvoka įgalina apibrėžti postūmio simetriją. Sakoma, kad geometrinė figūra $\mathcal{S}$ turi *postūmio simetriją* (angl. translational symmetry), jei egzistuoja postūmis T atvaizduojantis $\mathcal{S}$ į pačią save, t. y. $T(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Taip pat sakoma, kad figūra $\mathcal{S}$ yra simetrinė postūmio T atžvilgiu.

Pagal apibrėžimą, geometrinė figūra $\mathcal{S}$ yra simetrinė postūmio atžvilgiu, jei lygybė $T(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ teisinga bent su vienu postūmiu T. Praktiškai dauguma postūmio simetriją turinčių figūrų yra simetriškos daugelio postūmių atžvilgiu. Paprasčiausias simetrinės postūmio atžvilgiu figūros pavyzdys yra tiesė ℓ. Jei ant ℓ paimsime bet kuriuos du taškus A ir B, tai įsitikinsime, kad ℓ yra simetrinė postūmio T_{AB} atžvilgiu.

Atliekant eksperimentus su postūmio vaizdavimu permatoma plėvele (žr. [7]) galima įsitikini sekančių teiginių teisingumu.

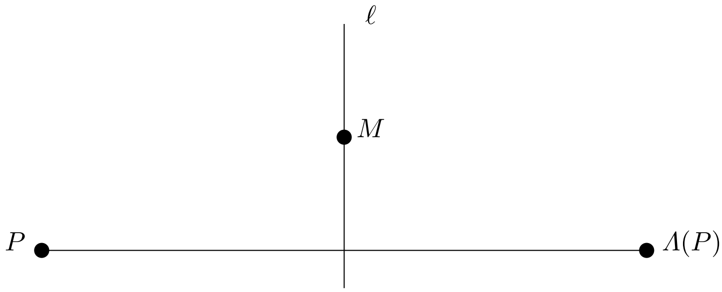
- $T1$ Postūmis išsaugo atkarpos ilgį ir kampo didumą.
- $T2$ Postūmiu tiesė atvaizduojama į tiesę, atkarpos vaizdas yra atkarpa, spindulio vaizdas yra spindulys.
- $T3$ Jei T yra postūmis iš A į B, tai tiesė ℓ yra atvaizduojama į tiesę lygiagrečią ℓ išskyrus atvejį, kai ℓ yra lygiagreti L_{AB}; jei ℓ yra lygiagreti arba lygi L_{AB}, tai postūmiu T gautas jos vaizdas sutampa su ℓ.

Tvirtiname, kad *postūmis yra izometrija* ir tai reikėtų paaiškinti. Prisiminkime, kad, pagal apibrėžimą, izometrija išsaugo atstumus tarp taškų. Be to, mes kalbėjome ir apie atkarpų ilgius. Tuo tarpu teiginyje $T1$ aukščiau minimas atkarpos ilgio išsaugojimas. Kadangi iki šiol nekomentavome ryšio tarp frazių „atstumas tarp taškų“ ir „atkarpos ilgis“, gali likti neaiškus skirtumas tarp tranformacijos galėjimo išsaugoti atkarpos ilgį ir išsaugoti atstumą tarp taškų. H.-H. Wu mokyklinėje geometrijoje atstumas tarp taškų yra pirminė sąvoka apibrėžiama A5 aksioma (žr. 10 skyrių), o atkarpos ilgis yra apibrėžiamas per atstumą. Būtent, tegul P ir Q yra bet kurie plokštumos taškai ir tegul PQ yra šiuos taškus jungianti atkarpa. Pagal apibrėžimą atkarpos PQ ilgis yra atstumas tarp P ir Q, t. y. $|PQ| := d(P, Q)$.

Tegul T yra postūmis, o P ir Q yra du skirtingi taškai. Tada jų vaizdais yra taškai $P' = T(P)$ ir $Q' = T(Q)$. Remiantis $T2$ teiginiu, atkarpos PQ vaizdas $T(PQ)$ yra atkarpa $P'Q'$ jungianti P' ir Q'. Pagal $T1$ teiginį, atkarpų PQ ir $P'Q'$ ilgiai yra lygūs. Tada atstumas tarp taškų P ir Q yra lygus atstumui tarp taškų P' ir Q'. Kadangi tai yra teisinga bet kurioms taškų P ir Q poroms, darome išvadą, kad postūmis T yra izometrija. Lygiagretusis postūmis yra pirmoji iš pagrindinių izometrijų.

3 Atspindys tiesės atžvilgiu

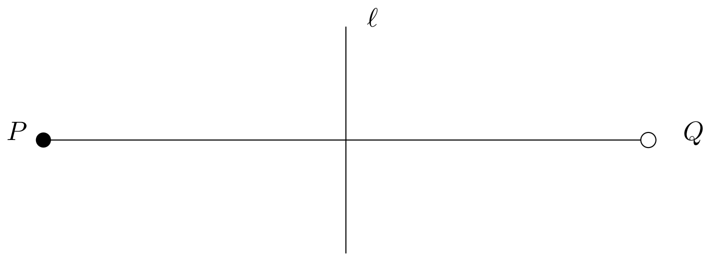
Apibrėšime taisyklę-transformaciją, kuri, vaizdžiai kalbant, „perkelia“ taškus esančius vienoje tiesės ℓ pusėje į kitą jos pusę ir palieka nepajudintais tiesės ℓ taškus. Šią transformaciją žymėsime graikiška raide Λ (didžioji Lambda) ir vadinsime ją *atspindžiu ℓ atžvilgiu* arba *atspindžiu atžvilgiu tiesės ℓ*: jei plokštumos taškas P nepriklauso tiesei ℓ, tai transformacija Λ taškas P atvaizduojamas į kitą tašką, žymimą $\Lambda(P)$, taip, kad tiesė ℓ yra taškus P ir $\Lambda(P)$ jungiančios atkarpos vidurio statmuo (angl. perpendicular bisector). Tada taškai P ir $\Lambda(P)$ yra priešingose tiesės ℓ pusėse:



7 pav. Atspindys Λ tiesės ℓ atžvilgiu.

Kita vertus, jei taškas M priklauso tiesei ℓ, tai, pagal apibrėžimą, $\Lambda(M) = M$, t. y. transformacija Λ taško M vieta nekeičiama. Apibendrinant, su bet kuriuo plokštumos tašku P, $\Lambda(P)$ žymi P vaizdą atspindžio Λ atžvilgiu, arba, paprasčiau, atspindėtu P vaizdu skersai ℓ. Taip pat sakoma, kad transformacija Λ taškas P atvaizduojamas į tašką $\Lambda(P)$.

Atspindys turi nuostabią savybę, kurią dabar paaiškinsime. Tegul Λ yra atspindys tiesės ℓ atžvilgiu. Tegul P yra taškas plokštumoje. Jei P nepriklauso ℓ, tai $\Lambda(P)$ yra taškas Q kitoje tiesės ℓ pusėje. Pagal apibrėžimą, ℓ yra statemena atkarpai PQ:



8 pav. Atspindys Λ tiesės ℓ atžvilgiu.

Dabar nagrinėkime tašką $Q' = \Lambda(Q)$; tiesė ℓ yra statmena atkarpai QQ', o tada atkarpa QQ' yra statmena tiesei ℓ. Bet kadangi atkarpa QP statmena tiesei ℓ, intuityviai aišku, kad dvi tiesės, kurioms priklauso QP ir QQ' turi sutapti, o tada Q' turi sutapti su P. Taigi, $\Lambda(Q) = P$, ir, kadangi $\Lambda(P) = Q$, turime lygybę $\Lambda(\Lambda(P)) = P$. Nuostabioji atspindžio savybė yra ši:

$$\Lambda\bigl(\Lambda(P)\bigr) = P \quad \text{su kiekvienu plokštumos tašku } P. \tag{1}$$

Suformuluosime keletą pastebėjimų apie atspindį, analogiškus teiginiams $T1$, $T2$, $T3$ apie postūmį. Jų tikrumas aiškintinas panašiai kaip ir postūmio atveju eksperimentuojant su permatoma plėvele [7]. Būtent

$\Lambda1$ Atspindys išsaugo atkarpos ilgį ir kampo didumą.

$\Lambda2$ Atspindžiu tiesė atvaizduojama į tiesę, atkarpos vaizdas yra atkarpa, spindulio vaizdas yra spindulys.

$\Lambda 3$ Pakartotinas atspindys skersai tos pačios tiesės palieka taškus savo vietose, t. y. $\Lambda(\Lambda(P)) = P$ su kiekvienu plokštumos tašku P.

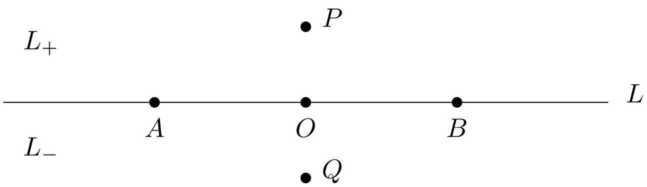
Tos pačios priežastys aptartos nagrinėjant ilgio ir atstumo ryšį bei teiginiai $\Lambda 1$, $\Lambda 2$ padeda įsitikinti, kad atspindys yra izometrija.

Kaip ir postūmio atveju, jei Λ yra atspindys atžvilgiu tiesės ℓ ir jei $\mathcal{S}$ yra geometrinė figūra plokštumoje, tai visų $\mathcal{S}$ taškų atspindėtų vaizdų rinkinys vadinamas $\mathcal{S}$ *atspindėtu vaizdu* arba $\mathcal{S}$ vaizdu atžvilgiu Λ ir žymimas $\Lambda(\mathcal{S})$. Taip pat sakoma, kad Λ atvaizduoja $\mathcal{S}$ į $\Lambda(\mathcal{S})$.

Jei geometrinė figūra atspindžiu atvaizduojama į lygią sau pačiai geometrinę figūrą, tai sakome, kad figūra turi *dvišalę simetriją* (angl. bilateral symmetry) tiesės ℓ atžvilgiu arba *atspindžio simetrija* atžvilgiu ℓ, o ℓ vadinama *simetrijos ašimi* arba *simetrijos tiese*. Pavyzdžiui, didžiosios raidės A, H, M turi dvišalę simetriją atžvilgiu vertikalios linijos nubrėžtos per raidės vidurį. Tas pats yra teisinga ir didžiosioms graikų kalbos raidėms Delta Δ ir Lambda Λ.

Kartais atspindys tiesės atžvilgiu vadinamas „simetrija tiesės atžvilgiu“ [8, 2 dalis, 12 p.], [5, 2 dalis, 86 p.]. Mes laikomės požiūrio, kad simetrija yra geometrinės figūros savybė, o ne transformacija. Todėl atspindžio nevadiname simetrija.

Dabar baigsime anksčiau pradėtą diskusiją apie tai, kad ištiestinis kampas turi 180°. Tarkime, kad duota tiesė L, dvi jos uždaros pusplokštumės L_+ ir L_- ir taškai A, O, B priklausantys tiesei L, kaip parodyta 9 paveikslėlyje.



9 pav. Ištiestinis kampas.

Pastebėkime, kad ištiestiniu kampu $\angle AOB$ galėtų būti L_+ arba L_-. Tarkime, kad Λ yra atspindys tiesės L atžvilgiu. Tvirtiname, kad $\Lambda(L_+) = L_-$ ir $\Lambda(L_-) = L_+$. Pirma įrodysime, kad $\Lambda(L_+) \subset L_-$. Jei taškas P priklauso uždarai pusplokštumei L_+, tai pagal atspindžio apibrėžimą $\Lambda(P)$ priklauso L_-. Todėl $\Lambda(L_+) \subset L_-$. Atvirkščiai, įrodysime, kad $L_- \subset \Lambda(L_+)$. Tarkime, kad Q priklauso L_-. Tegul $P = \Lambda(Q)$; tada P priklauso L_+. Bet pagal (1), turime lygybes

$$Q = \Lambda\bigl(\Lambda(Q)\bigr) = \Lambda(P).$$

Todėl Q priklauso $\Lambda(L_+)$, t. y. $L_- \subset \Lambda(L_+)$. Pagal figūrų lygybės apibrėžtį įrodėme, kad $\Lambda(L_+) = L_-$. Antrąją lygybę $\Lambda(L_-) = L_+$ siūlome įrodyti skaitytojui.

Tai rodo, kad Λ atvaizduoja bet kurį ištiestinį kampą, kuriuo gali būti laikomas $\angle AOB$, į kitą. Kadangi atspindys išsaugo kampo didumą pagal teiginį $\Lambda 1$, du ištiestiniai kampai L_+ ir L_- yra lygūs savo dydžiu. Kadangi abu jie sudaro 360°, tai kiekvienas iš jų lygus 180°.

4 Sukinys aplink tašką

Liko aptarti paskutinę pagrindinę izometriją – sukinį. Sukiniu R su centru taške O ir e laipsnių kampu, kai $-360 \leqslant e \leqslant 360$, vadinama taisyklė, kuri nekeičia taško O padėties, bet keičia kiekvieno kito taško P padėtį sekančiu būdu:

> Jei $e \geqslant 0$, taškai P ir O jungiami atkarpa OP, kuri atvaizduojama e laipsnių sukimu prieš laikrodžio rodyklę apie centrą O. Nauja taško P padėtis atlikus sukinį R žymima $R(P)$. Jei $e < 0$, tai atkarpa OP atvaizduojama $|e|$ laipsnių sukimu pagal laikrodžio rodyklę.

Taškas $R(P)$ vadinamas P vaizdu atžvilgiu R arba, paprasčiau, pasukto P vaizdas. Taip pat sakoma, kad sukiniu R taškas P atvaizduojamas į tašką $R(P)$. Jei $\mathcal{S}$ yra geometrinė figūra, tai visų jos taškų vaizdų rinkinys vadinamas $\mathcal{S}$ vaizdu atžvilgiu R, žymimu $R(\mathcal{S})$. Taip pat sakoma, kad sukiniu R figūra $\mathcal{S}$ atvaizduojama į figūrą $R(\mathcal{S})$.

Dabar patyrinėsime tą patį centrą turinčių dviejų sukinių kompoziciją. Pirma, paprastesnis atvejis. Tegul R yra sukinys s° apie tašką O ir R' yra sukinys $-s^\circ$ apie tą patį tašką O. Sukiniu R taškas P atvaizduojamas į tašką $R(P)$, kuris, po to, sukiniu R' atvaizduojamas į tą patį tašką P, t. y. P lieka savo vietoje. Šių sukinių nuoseklaus atlikimo taškui P rezultatas žymimas $R'(R(P))$. Simboliškai kompoziciją galima pavaizduoti taip:

$$P \overset{R}{\mapsto} R(P) \overset{R'}{\mapsto} R'\big(R(P)\big) = P. \tag{2}$$

Sukeitę vietomis sukinius gauname tą patį rezultatą $R(R'(P)) = P$.

Antra, bendresnis atvejis. Dabar nagrinėkime s° sukinį R apie centrą O, čia $-360 \leqslant s \leqslant 360$. Kadangi dabar mums rūpi laipsniai, laikinai pakeisime s° sukinio R žymėjimą į R_s. Panašiai, tegul R_t yra t° sukinys apie tą patį centrą O, čia $-360 \leqslant t \leqslant 360$. Jei $-360 \leqslant s + t \leqslant 360$, tai gauname

$$R_t\big(R_s(P)\big) = R_{s+t}(P) \quad \text{su kiekvienu tašku } P. \tag{3}$$

Jei geometrinė figūra $\mathcal{S}$ turi savybę, jog egzistuoja sukinys R (apie kurį nors centrą kuriuo nors kampu) atvaizduojantis $\mathcal{S}$ į save, tai sakome, kad $\mathcal{S}$ turi sukimosi simetriją atžvilgiu R. Intuityviai aišku, kad kvadratas turi sukimosi simetriją atžvilgiu sukinio 90° kampu apie kvadrato centrą O. Taip pat intuityviai aišku, kad taisyklingas daugiakampis su n kraštinėmis turi sukimosi simetriją atžvilgiu sukinio $(360/n)^\circ$ kampu apie kurį nors tašką daugiakampio viduje. Nesunku pasitikrinti, kad apskritimas turi sukimosi simetriją atvilgiu sukinio apie savo centrą d° kampu, čia d gali būti bet kuris skaičius tarp -360 ir 360.

Kaip ir apie postūmį bei atspindį, apie sukinį galima tvirtinti esant teisingiems šiuos pastebėjimus:

- $R1$ sukinys išsaugo atkarpos ilgį ir kampo didumą.
- $R2$ sukiniu tiesė atvaizduojama į tiesę, atkarpos vaizdas yra atkarpa, spindulio vaizdas yra spindulys.
- $R3$ jei R_s ir R_t yra du sukiniai, atitinkamai, s ir t laipsnių, ribojamų nelygybe $-360 \leqslant s + t \leqslant 360$, apie tą patį centrą, tai, su bet kuriuo tašku P, taškas $Q = R_t(R_s(P)$, gaunamas iš taško P nuosekliai taikant R_s ir po to R_t, sutampa su taško P vaizdu gaunamu taikant sukinį $s + t$ laipsnių kampu apie tą patį centrą.

Teiginiai $R1$ ir $R2$ sukiniui yra analogiški teiginiams $\Lambda 1$ ir $\Lambda 2$ atspindžiui bei $T1$ ir $T2$ postūmiui. Todėl samprotavimai analogiški tiems, kuiuos naudojome aptardami ilgį ir atstumą atžvilgiu postūmio, tinka pagrįsti tai, kad *sukinys yra izometrija*. Tokiu būdu pasiekėme paskutinę iš trijų pagrindinių izometrijų, kurias naudosime toliau apibrėždami figūrų kongruenciją. Apibendrindami šešis teiginius suformuluosime prielaidas apie pagrindines izometrijas:

$Iso1$ Postūmiai, atspindžiai ir sukiniai išsaugo atkarpos ilgį ir kampo didumą.

$Iso2$ Atžvilgiu postūmio arba atspindžio arba sukinio, tiesės vaizdas yra tiesė, atkarpos vaizdas yra atkarpa, spindulio vaizdas yra spindulys.

Vyresnėse klasėse įrodinėdami naudojame šias prielaidas įtvirtinančią A7 aksiomą.

5 Figūrų kongruencija

Šiame skyrelyje suteiksime konkrečią prasmę frazei „to paties dydžio ir formos figūros“ sutinkamai vadovėlinėje mokyklinėje matematikoje. Tam tikslui priminsime funkcijų kompozicijos sąvoką. Turėdami dvi pagrindines izometrijas F ir G, jų pagalba apibrėšime naują transformaciją: tai nauja taisyklė atvaizduojanti kiekvieną plokštumos tašką P į tašką $F(G(P))$. Pirma, ši taisyklė turi prasmę, nes $G(P)$ būdamas plokštumos tašku yra transformacijos F vaizduojamas į tašką $F(G(P))$. Naujoji transformacija vadinama *kompozicija* arba sudėtine funkcija ir žymima simboliu $F{\circ}G$. Kompozicija gaunamo taško P vaizdas simboliu užrašomas taip:

$$(F{\circ}G)(P) = F\big(G(P)\big).$$

Taisyklingas kompozicijos simbolio naudojimas remiasi supratimu, kad transformacija kaip taisyklė yra kitos rūšies matematinis objektas negu plokštumos taškas. Kitas dalykas yra kompoziciją $F{\circ}G$ sudarančių transformacijų F ir G eiliškumas; nors pirmąja rašoma transformacija F, bet pirmoji tašką P vaizduoja transformacija G:

$$P \mapsto G(P) \mapsto (F{\circ}G)(P).$$

Naudojant kompozicijos simbolį kitaip galime užrašyti (1) atspindžio Λ savybę:

$$(\Lambda{\circ}\Lambda)(P) = P \quad \text{su kiekvienu plokštumos tašku } P. \tag{4}$$

Panašiai galime išreikšti sukinio (3) savybę. Turint tašką O, s ir t laipsnių sukinius apie O žymėsime R_s ir R_t, atitinkamai, kai s ir t yra tarp -360 ir 360. Tada, jei $-360 \leqslant s + t \leqslant 360$ turime

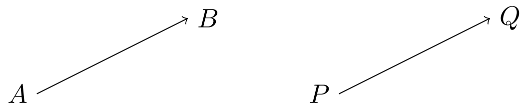
$$(R_t{\circ}R_s)(P) = R_{s+t}(P) \quad \text{su kiekvienu tašku } P. \tag{5}$$

Atskiru atveju, kadangi 0° sukinys R_0 nekeičia taško padėties, (2) savybė atrodo taip

$$(R_t{\circ}R_{-t})(P) = P \quad \text{su kiekvienu tašku } P. \tag{6}$$

Lygiagretusis postūmis taip pat turi savybę analogišką čia prisimintoms atspindžio ir sukinio savybėms. Su bet kuriuo vektoriumi $\overrightarrow{AB}$, teisinga savybė:

$$(T_{AB}{\circ}T_{BA})(P) = P \quad \text{su kiekvienu tašku } P. \tag{7}$$



10 pav. Postūmio savybė.

Norint paaiškinti pastarąją postūmio savybę reikėtų pastebėti, kad laisvai pasirinktas taškas P transformacija T_{AB} atvaizduojamas į tašką Q taip, kad $|PQ| = |AB|$ ir $PQ \| AB$, o vektoriai $\overrightarrow{PQ}$ ir $\overrightarrow{AB}$ nukreipti ta pačia kryptimi (10 pav.). „Apgręžtu" postūmiu T_{BA} taškas Q atvaizduojamas į tašką Q' taip, kad $|QQ'| = |BA|$ ir $QQ' \| BA$, o vektoriai $\overrightarrow{PQ}$ ir $\overrightarrow{AB}$ nukreipti ta pačia kryptimi. Remiantis lygiagretumo aksioma ($A2$) (10 skyrelis), dvi tiesės L_{PQ} ir $L_{QQ'}$, abi būdamos lygiagrečios tiesei L_{AB} ir eidamos per tą patį tašką Q, turi sutapti. Todėl taškas Q atvaizduojamas atgal atstumu $|BA|$ taško P kryptimi išilgai tiesės L_{PQ} turi sutapti su P. Tai paaiškina (7) savybę.

Turėdami dviejų pagrindinių izometrijų kompozicijos sampratą, ją galime apibendrinti bet kuriam skaičiui pagrindinių izometrijų. Pavyzdžiui, jei F, G, H yra trys pagrindinės izometrijos, tai kompozicija $F \circ G \circ H$ yra $F \circ G$ ir H kompozicija arba, nuosekliau formuluojant apibrėžimą, tai yra taisyklė, kuri laisvai pasirinktą tašką P atvaizduoja į tašką $F(G(H(P)))$. Plokštumos *kongruencija* yra tokia plokštumos GT, kurią sudaro (baigtinio skaičiaus) pagrindinių izometrijų kompozicija. Dvi vienoje plokštumoje esančios geometrinės figūros $\mathcal{S}$ ir $\mathcal{T}$ vadinamos *kongruenčiomis*, jei egzistuoja tokia kongruencija F, kuria $\mathcal{S}$ atvaizduojama į $\mathcal{T}$.

Kadangi pagrindinės izometrijos išsaugo atstumus tarp taškų ir kampų dydžius, tą pačią savybę turi ir pagrindinių izometrijų kompozicijos. Kitais žodžiais tariant, *kongruencija išsaugo atstumus tarp taškų ir kampų dydžius*. Tuo būdu kongruenčios figūros yra „to paties dydžio ir formos".

Dabar kongruencijos sąvoką taikysime trikampiams ir aptarsime ką reiškia, kad „atitinkamos trikampių dalys yra kongruenčios". Tarkime, kad du trikampiai $\triangle ABC$ ir $\triangle A_0B_0C_0$ yra kongruentūs, simboliais: $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$. Kadangi trikampius vienareikšmiškai nusako trys jų viršūnės, tai reiškia, kad egzistuoja kongruencija F, kuri atvaizduoja $\triangle ABC$ į $\triangle A_0B_0C_0$ taip, kad

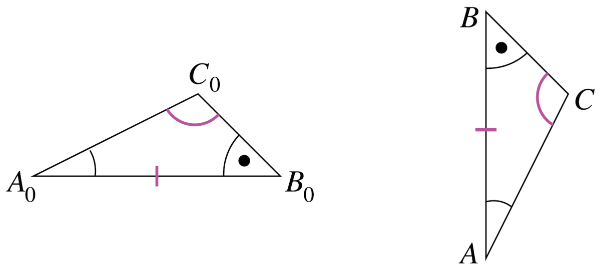
$$F(A) = A_0, \quad F(B) = B_0, \quad F(C) = C_0. \tag{8}$$

Atkarpa ir jos vaizdas atžvilgiu F, kampas ir jo vaizdas atžvilgiu F, vadinami *atitinkamomis dalimis*. Pavyzdžiui, BC ir B_0C_0 yra kongruenčios dalys, nes $F(BC) = F_0B_0$. Atitinkamų atkarpų BC ir B_0C_0 ilgiai yra lygūs dėl pagrindinių izometrijų savybės $Iso1$ 4 skyrelio gale. Panašiai, kadangi $F(\angle ACB) = \angle A_0C_0B_0$, $\angle ACB$ ir $\angle A_0C_0B_0$ yra atitinkami kampai ir jų dydžiai yra lygūs dėl pagrindinių izometrijų savybės $Iso1$.

Simbolinis teiginys apie trikampių kongruenciją $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$ nurodo viršūnes suporuotas (8) kongruencijos F atžvilgiu.

6 Trikampių kongruencijos požymiai

Šis skyrelis yra pagrindinė plokštumos geometrijos tema. Maždaug aštuntos klasės griežtumo lygiu ir naudodami pagrindines izometrijas įrodysime tris trikampių



11 pav. Kongruentūs trikampiai.

kongruentumo požymius. Tai reiškia, kad jas *paaiškinsime* remdamiesi pagrindinių izometrijų savybėmis $Iso1$ ir $Iso2$. Šiame etape svarbu paaiškinti matematines idėjas.

Nusižengdami matematinės kalbos tikslumui sakysime, kad trikampių kraštinės lygios, jei jų ilgiai yra lygūs, o trikampio kampai lygūs, jei jų dydžiai yra lygūs. Praeito skyrelio gale parodėme, jei $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$, tai atitinkamos trikampių dalys yra lygios (žr. 11 pav.). Išreikšime šį teiginį tiksliau simboliais:

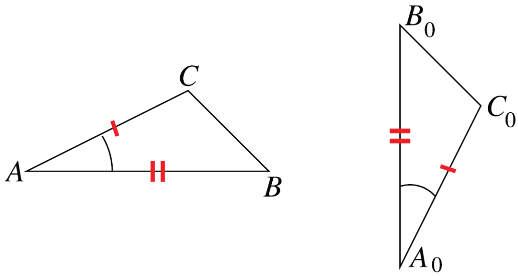
$$|AB| = |A_0B_0|, \quad |BC| = |B_0C_0|, \quad |AC| = |A_0C_0|, \tag{9}$$
$$|\angle A| = |\angle A_0|, \quad |\angle B| = |\angle B_0|, \quad |\angle C| = |\angle C_0|. \tag{10}$$

Klausimas, ar teisingas atvirkščias teiginys, t. y. jei trys poros kraštinių ir trys poros kampų yra lygūs, tai ar trikampiai kongruentūs? Klausimo sudėtingumą sudaro tai, kad pradėdami šešiomis poromis lygybių siejančių tik dviejų trikampių dalis ir nieko kito, norime kažką pasakyti apie visą plokštumą, būtent, kad egzistuoja taisyklė (kongruencija), kuria atvaizduojamas kiekvienas plokštumos taškas ir, tuo būdu, vienas trikampis perkeliamas ant kito trikampio.

Kaip mes gerai žinome, teisingas stipresnis teiginys, negu paprastas atsakymas į klausimą – taip. Mums nebūtina pradėti nuo prielaidos apie šešias lygybes. Jei samprotauti išmintingai, tai pageidaujamai išvadai pakanka trijų lygybių kaip prielaidų. Teisingi sekantys trys trikampių kongruentumo požymiai.

> kKk kongruentumo požymis. Jei du trikampiai turi lygių kampų porą ir tų kampų atitinkamų kraštinių abiejuose trikampiuose poros yra lygios, tai abu trikampiai yra kongruentūs.
>
> KkK kongruentumo požymis. Jei du trikampiai turi dvi poras lygių kampų ir vieno trikampio bendra abiem kampams kraštinė yra lygi kito trikampio atitinkamai kraštinei, tai abu trikampiai yra kongruentūs.
>
> kkk kongruentumo požymis. Jei du trikampiai turi tris poras lygių kraštinių, tai abu trikampiai yra kongruentūs.

Dalį laiko klasėje reikėtų skirti trikampių kongruentumo požymių tikrinimui pasitelkiant piešimo ar skaitmenines priemones. Neturint išankstinio įsitikinimo, kad tai, ką mokiniai nori įrodyti, yra teisinga, jiems būtų sunku išmokti įrodinėti. Kongruentumo požymių įrodymų nagrinėjimui būtų geriausia pasitelkti įvairias tam skirtas mokymo



12 pav. Kongruentūs trikampiai.

priemones, medinius trikampių modelius ir panašiai. Tokiais būdais jie intuityviai geriau suprantami, negu mūsų toliau pateikiamas samprotavimas tekstu.

kKk kongruentumo požymio įrodymas. Duoti tokie du trikampiai ABC ir $A_0B_0C_0$, kad

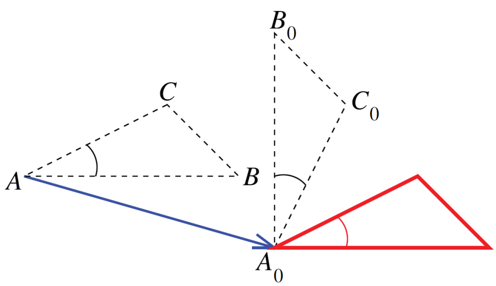
$$|AB| = |A_0B_0|, \quad |\angle A| = |\angle A_0|, \quad |AC| = |A_0C_0|. \tag{11}$$

Mums reikia sukonstruoti tokią pagrindinių izometrijų kompoziciją F, kuria trikampis ABC atvaizduojamas į trikampį $A_0B_0C_0$, viršūnė į viršūnę:

$$F(A) = A_0, \quad F(B) = B_0, \quad F(C) = C_0. \tag{12}$$

Šios lygybės skatina spėti, kad pagrindinių izometrijų konstravimą galima būtų atlikti nuosekliai siejant atitinkamų viršūnių poras. Pirmuoju žingsniu pasirinkta trikampio ABC viršūnė perkeliama į atitinkamą trikampio $A_0B_0C_0$ viršūnę lygiagrečiuoju postūmiu. Plėtojant šią idėją, verta įrodymą suskaidyti į tris žingsnius pagal viršūnių skaičių.

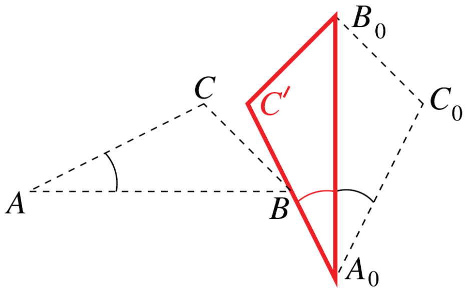
1 žingsnis. Sujunkime viršūnes A ir A_0 kartu. Jei $A = A_0$, tai nieko nereikia daryti. Jei ne, tai tegul T yra postūmis atžvilgiu vektoriaus $\overrightarrow{AA_0}$. Galutinė trikampio ABC padėtis atlikus postūmį išilgai $\overrightarrow{AA_0}$ pavaizduota 13 paveiksliuke.



13 pav. Galutinis postūmio iš A į A_0 rezultatas.

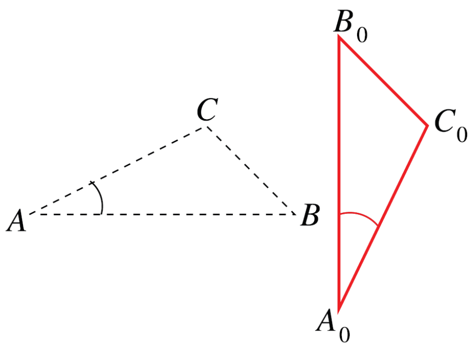
2 žingsnis. Sujunkime viršūnes B ir B_0 kartu. Postūmiu T gautą atkarpos AB vaizdą (13 paveikslėlyje tai raudonojo trikampio horizontali kraštinė) jungiame su

A_0B_0 naudodami sukinį. Jei kampas tarp $T(AB)$ ir A_0B_0 yra t° (paveikslėlyje $t = 90$), tai t° sukinys apie centrą A_0 atvaizduos $T(AB)$ ant spindulio $R_{A_0B_0}$. Pavadinkime šį sukinį R. Duota, kad $|AB| = |A_0B_0|$ ir žinome, kad postūmis išsaugo atkarpos ilgį. Todėl atkarpų $T(AB)$ ir A_0B_0 ilgiai sutampa, o R atvaizduoja $T(AB)$ ant trikampio $A_0B_0C_0$ kraštinės A_0B_0 kaip parodyta 14 paveikslėlyje. Po pirmųjų dviejų žingsnių, T kompozicija su R sujungia viršūnes B ir B_0 kartu.



14 pav. Sukinio R apie A_0 rezultatas.

3. žingsnis. Sujunkime viršūnes C ir C_0 kartu. Postūmis T ir sukinys R trikampio ABC viršūnes A ir B atvaizdavo į trikampio $A_0B_0C_0$ viršūnes A_0 ir B_0, atitinkamai; tarkime, kad T ir R transformacijų kompozicijos rezultate viršūnės C vaizdas yra C' pavaizduotas 14 paveiksliuke. Tvirtiname, kad atspindys Λ tiesės $L_{A_0B_0}$ atžvilgiu (nekeičiantis taškų A_0 ir B_0 padėties) sujungs viršūnes C ir C_0 kartu. Iš tikro, 14 paveiksliuke pažymėti du kampai su bendra virūne A_0 yra lygūs, kadangi izometrija nekeičia kampų dydžio ir, pagal prielaidą, kampai $\angle CAB$ ir $\angle C_0A_0B_0$ yra lygūs. Todėl atspindžiu Λ kampas $C'A_0B_0$ atvaizduojamas į kampą $C_0A_0B_0$, o spindulys $R_{A_0C'}$ atvaizduojamas į spindulį $R_{A_0C_0}$. Prisiminus, kad atkarpų A_0C' ir A_0C_0 ilgiai yra lygūs, nes izometrija išsaugo atkarpų ilgius, ir pagal prielaidą $|AC| = |A_0C_0|$. Todėl atkarpos A_0C' atspindėtas vaizdas $\Lambda(A_0C')$ sutampa su atkarpa A_0C_0. Taigi Λ atvaizduoja C' į C_0. Tuo būdu T, R ir Λ kompozicija sujungia viršūnes C ir C_0 kartu. Kadangi Λ nekeičia A_0 ir B_0 padėties, sukonstruota kompozicija trikampis ABC atvaizduojamas į trikampį $A_0B_0C_0$, kaip parodyta 15 paveiksliuke.



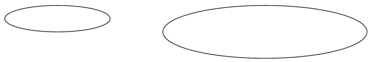
15 pav. Kompozicijos T, R ir Λ vaizdas.

Gavome, kad kompozicija $R \circ \Lambda \circ T$ yra kongruencija F, kuriai teisingos (12) lygybės, t. y. kongrunecija F trikampis ABC atvaizduojamas į trikampį $A_0B_0C_0$. Tiksliau kongruenciją sudaro postūmis T išilgai AA_0, sukinys R su centru viršūnėje A_0 ir atspindys Λ tiesės $L_{A_0B_0}$ atžvilgiu. □

Kitų dviejų trikampių kongruentumo požymių KkK ir kkk įrodymai yra panašūs.

7 Dilatacija ir figūrų panašumas

Iki šiol nagrinėjome izometrijas, kurios nekeičia atstumų tarp taškų. Šiame skyrelyje nagrinėsime transformacijas, kurios keičia atstumus tarp taškų, bet tokiu taisyklingu būdu, kad nekeičia atvaizduojamos figūros formos. Daugiakampių atveju, formos keitimas yra išreiškiamas atitinkamų kraštinių santykiais. Į elipses panašioms kreivinėms figūroms yra mažiau aišku, ką reiškia vienai figūrai būti „dvigubai didesnė“ už kitą:



Tuo tikslu naudosime dilatacijos sąvoką.

1 apibrėžimas. Plokštumos transformacija D vadinama dilatacija su centru taške O ir koeficientu r, $(r > 0)$, jei

(i) transformacija D taškas O atvaizduojamas į save;

(ii) jei plokštumos taškas P nelygus O, tai transformacija D taškas P atvaizduojamas į tašką P' esantį ant spindulio R_{OP} taip, kad $|OP'| = r|OP|$.

Atveju $r > 1$ dilataciją D vadiname ištempiu, o atveju $0 < r < 1$ dilataciją D vadiname sąspūdžiu.

Piešinys iliustruoja ištempį.

Jei dilatacija su centru O taškai P ir Q atvaizduojami į taškus P' ir Q', atitinkamai, tai

$$\frac{|OP|}{|OP'|} = \frac{|OQ|}{|OQ'|}, \tag{13}$$

kadangi abu santykiai lygūs tam pačiam dilatacijos koeficientui.

Sekantis faktas vadinamas *fundamentaliąja panašumo teorema* (FPT).

2 teorema [FPT]. *Tarkime, kad D yra dilatacija su centru taške O ir koeficientu $r > 0$, o P ir Q yra tokie du taškai, kad O, P, Q nėra kolinearūs. Tegul $P' = D(P)$ ir $Q' = D(Q)$. Tada tiesės L_{PQ} ir $L_{P'Q'}$ yra lygiagrečios. Be to, $|P'Q'| = r|PQ|$.*

2 teorema įrodyta mokytojo knygose [12, 6.4 skyrelis], kai r yra trupmena, ir [13, 2.6 skyrelis], kai r yra realusis skaičius. Šie du atvejai nagrinėjami atskirai todėl, kad santykių savybės (kryžminė sandauga ir kitos) pagrindinio ugdymo turinyje įrodomos tik racionaliesiems skaičiams, o jų apibendrinimas realiesiems skaičiams reikalauja ribos sampratos, kuri paprastai priklauso vidurinio ugdymo turiniui. Aišku, šias savybes galima naudoti be įrodymo kai tik jų reikia, bet būtina šią aplinkybę paaiškinti mokiniams ir tai įvardinti, pavyzdžiui, kaip Mokyklinės matematikos fundamentaliąja prielaida (MMFP) bei nepamiršti ją įrodyti kai tik apibrėžiamos reikalingos sąvokos.

2 teorema yra ekvivalenti sekančiai teoremai, kurią žymėsime FPT*. Ekvivalentumas įrodytas [14, 5.1 skyrelis] su MMFP, o ši prielaida įrodyta [13, 2.1 skyrelis].

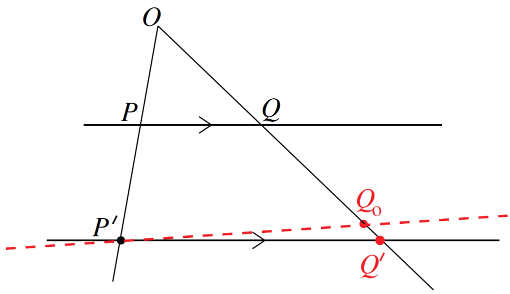
3 teorema [FPT*]. *Tarkime, kad duotas $\triangle ABC$ ir D yra taškas spindulyje R_{AB} nelygus A ir B. Tarkime, kad tiesė ℓ lygiagreti kraštinei BC ir eina per tašką D. Tada ℓ kerta spindulį R_{AC} taške E ir*

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}.$$

Jei 2 teoremoje vietoje dilatacijos koeficiento r naudojamas (13) santykis, tai FPT* ir FPT sutampa su Talio teorema ir atvirkštine Talio teorema, atitinkamai. Tačiau atitinkamų teiginių įrodymai skiriasi kai Talio teoremų įrodymuose neatsižvelgiama į anksčiau minėtą atkarpų ilgių santykio savybių statusą mokyklinėje matematikoje. Tokio neapdairumo nebuvo tarpukario mokyklinėje matematikoje. Pavyzdžiui, 1938 metų leidimo M. Šikšnio vadovėlyje [15, 41 p.] įrodant Talio teoremą skiriami du atvejai, kai nagrinėjamos atkarpos bendramatės ir nebendramatės. Vadovėlio autorius pastebi, kad pirmuoju atveju galima naudoti „geometrinės proporcijos ypatybes“, o antruoju atveju jis naudoja apytikrių santykių seką.

Čia įrodysime tik vieną faktą, kuriuo remiamės toliau įrodydami kk trikampių panašumo požymį.

4 teorema. *Tegul D yra dilatacija su centru taške O ir koeficientu r. Tegul P ir Q yra tokie du taškai, kad O, P, Q nėra kolinearūs. Galiausiai tegul $P' = D(P)$. Tada Q vaizdas Q' atžvilgiu D yra tiesės L_{OQ} sankirta su tiese einančia per P' ir lygiagrečia su L_{PQ}.*



16 pav. Dilatacijos savybė.

Įrodymas. Tegul ℓ yra tiesė einanti per tašką P' ir lygiagreti tiesei L_{PQ}, kuri 16 pav. pažymėta punktyrine linija. Tegul Q_0 yra tiesių ℓ ir L_{OQ} susikirtimo taškas. Reikia įrodyti, kad $Q_0 = Q'$ $(= D(Q))$. Remiantis 2 teorema, $L_{P'Q'}$ yra lygiagreti L_{PQ} ir eina per tašką Q'. Pagal apibrėžimą, ℓ taip pat eina per tašką P' ir yra lygiagreti L_{PQ}. Lygiagrečių tiesių aksioma (A2) garantuoja, kad tiesės ℓ ir $L_{P'Q'}$ sutampa. Todėl taškas Q' priklauso tiesei ℓ. Kadangi taškas Q' priklauso ir L_{OQ}, tai jis yra ℓ ir L_{PQ} susikirtimo taškas. Todėl $Q' = Q_0$, ką ir reikėjo įrodyti. $\square$

Intuityviai kalbant dvi figūros yra panašios, jei jos turi tą pačią „formą“. Tiksliau panašumas vadovėliuose apibrėžiamas tik trikampiams ir daugiakampiams naudojant šių figūrų specifiką – kraštines ir kampus. Tuo tarpu funkcijų grafikų panašumas reikalautų kitokios apibrėžties. Geometrijoje plokštumos figūrų panašumas apibrėžiamas naudojant dilatacijos ir kongruencijos transformacijas.

Dvi plokštumos geometrinės figūros $\mathcal{S}$ ir $\mathcal{S}'$ vadinamos *panašiomis*, žymima $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$, jei egzistuoja tokia dilatacija D, kad $D(\mathcal{S})$ yra kongruenti $\mathcal{S}'$. Kitaip tariant, figūros $\mathcal{S}$ ir $\mathcal{S}'$ yra panašios, jei egzistuoja kongruencija F ir dilatacija D tokie, kad $F(D(\mathcal{S})) = \mathcal{S}'$, t. y. kompozicija $F \circ D$ figūrą $\mathcal{S}$ atvaizduoja į figūrą $\mathcal{S}'$. Kompozicija $F \circ D$ vadinama *panašumo transformacija*, o dilatacijos koeficientas vadinamas *panašumo koeficientu*. Jei panašumo koeficientas lygus 1, tai panašumas reiškia kongruenciją, nes dilatacija su vienetiniu koeficientu yra tapatinga transformacija.

8 Trikampių panašumas

Sakysime, kad trikampiai $\triangle ABC$ ir $\triangle A'B'C'$ yra panašūs, simboliais žymėsime $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, jei egzistuoja tokia panašumo transformacija G, kad

$$G(A) = A', \quad G(B) = B', \quad G(C) = C'.$$

Pagal šį apibrėžimą trikampių panašumas reiškia ne tik tai, kad trikampiai $G(\triangle ABC)$ ir $\triangle A'B'C'$ lygūs figūrų lygybės prasme, bet ir tai, kad transformacija G suporuoja trikampių viršūnes tam tikra tvarka.

Galima nesunkiai įsitikinti, kad iš šio trikampių panašumo sampratos išplaukia vadovėlinė trikampių panašumo samprata išreikšta per trikampių kampus ir kraštines. Būtent teisinga sekanti teorema.

5 teorema. *Jei du trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra panašūs, tai teisingos lygybės*:

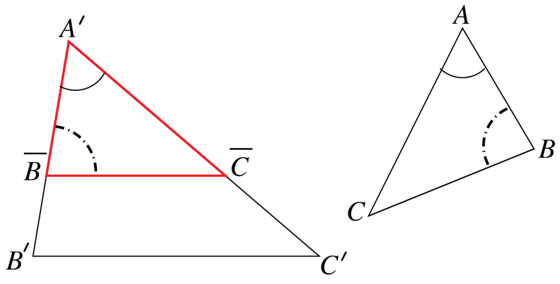
$$|\angle A| = |\angle A'|, \quad |\angle B| = |\angle B'|, \quad |\angle C| = |\angle C'|$$

ir

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

Mus domins atvirkštinis teiginys, t. y. sąlygos, kurių pakanka norint įsitikinti, kad trikampiai panašūs. Dažnai naudojamas toks teiginys vadinamas kk trikampių panašumo požymiu, t. y. trikampių dviejų porų kampų lygybė yra pakankama sąlyga jų panašumui.

6 teorema [AA trikampių panašumo požymis]. *Du trikampiai, kurių dvi poros kampų lygios, yra panašūs.*



17 pav. AA panašumo požymis.

Įrodymas. Tarkime, kad duoti du trikampiai ABC ir $A'B'C'$. Taip pat tarkime, kad $|\angle A| = |\angle A'|$ ir $|\angle B| = |\angle B'|$. Reikia įrodyti, kad $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Ant spindulio $R_{A'B'}$ randame tokį tašką $\overline{B}$, kad $|A'\overline{B}| = |AB|$. Tiesės, einančios per tašką $\overline{B}$ ir lygiagrečios atkarpai $B'C'$, susikirtimo su spinduliu $R_{A'C'}$ tašką pažymime $\overline{C}$. (17 paveikslėlis vaizduoja atvejį kai $|AB| < |A'B'|$). Kadangi lygiagrečiųjų tiesių atitinkamieji kampai lygūs, tai $|\angle A'\overline{BC}| = |\angle B'|$. Tačiau pagal prielaidą, $|\angle B'| = |\angle B|$. Todėl
$$|\angle A'\overline{BC}| = |\angle B|.$$
Kadangi pagal prielaidą $|\angle A'| = |\angle A|$, tai $\triangle A'\overline{BC} \cong \triangle ABC$ remiantis KkK trikampių kongruentumo požymiu. Raide F pažymėkime kongruenciją, kurios dėka $F(\triangle A'\overline{BC}) = \triangle ABC$. Tegul D yra dilatacija, kurios centru yra A', o koeficientas r apibrėžtas lygybe $|A'B'| = r|A'\overline{B}|$. Todėl $D(B') = \overline{B}$, o D yra sąspūdis. Kadangi $\overline{BC} \| B'C'$, tai, remiantis 4 teorema, $D(C') = \overline{C}$. Todėl $D(\triangle A'B'C') = \triangle A'\overline{BC}$. Sukonstravome panašumą $F \circ D$, kuris veikia taip:
$$\bigl(F \circ D\bigr)(\triangle A'B'C') = F\bigl(D(\triangle A'B'C')\bigr) = F\bigl(\triangle A'\overline{BC}\bigr) = \triangle ABC.$$
6 teoremos įrodymas baigtas. $\square$

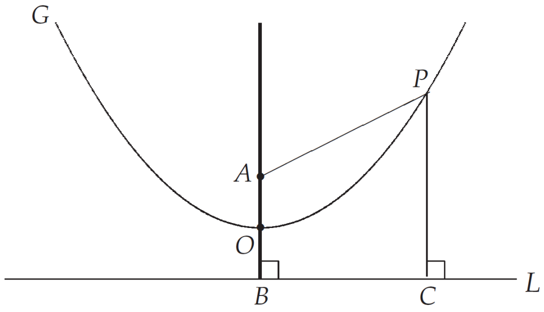
Kitas atvirkštinis 5 teoremai teiginys yra dar vienas trikampio panašumo požymis.

7 teorema [kKk trikampių panašumo požymis]. *Tarkime, kad du trikampiai ABC ir $A'B'C'$ susiję taip, kad $|\angle A| = |\angle A'|$ ir*
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}.$$
Tada $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Šios teoremos įrodymas panašus ankstesnės teoremos įrodymui, todėl jį praleidžiame.

9 Kvadratinių funkcijų grafikai

Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadinama *kvadratine*, jei, su kuriuo nors konstantų trejetu $a \neq 0$, b ir c, jos reikšmės $f(x) = ax^2 + bx + c$ visiems argumentams $x \in \mathbb{R}$. Apibūdinsime kvadratinės funkcijos grafiką $\{(x, f(x))\colon x \in \mathbb{R}\}$.



18 pav. Parabolė G.

Plokštumoje laisvai pasirinkime tašką A ir tiesę L. Geometrinė vieta taškų, kurie vienodu atstumu nutolę nuo taško A ir tiesės L vadinama *parabole*. Taškas A vadinamas parabolės *židiniu*, o tiesė L – *direktrise*. Pav. 18 eskize pavaizduota parabolės dalis G ir jos taškas $P \in G$. Pagal parabolės apibrėžimą, $|PA| = |PC|$, čia C taškas gaunamas brėžiant vertikalę iš taško P į tiesę L. Iš taško A brėžiant vertikalę į tiesę L, ji parabolę kerta taške O ir tiesę L kerta taške B. Taškas O vadinamas parabolės G *viršūne*. Pagal parabolės apibrėžimą, $|AB| = 2|AO|$.

8 teorema. *Kvadratinės funkcijos grafikas yra parabolė.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti mokytojo knygoje [9, 259 p.]. Jos atskiras atvejis yra įrodytas metodinėje priemonėje [7]. Mūsų vadovėliuose apie dviejų aibių lygybės faktą paprastai neužsimenama, kvadratinės funkcijos grafikas tiesiog pavadinamas parabole.

Tegul $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ yra kvadratinės funkcijos f koeficientas. Transformacijų atžvilgiu apibūdinant kvadratinės funkcijos f grafiką naudinga apibrėžti dvi pagalbines funkcijas f_a ir h_a:

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ su reikšmėmis } f_a(x) = ax^2 \text{ kiekvienam } x \in \mathbb{R},$$

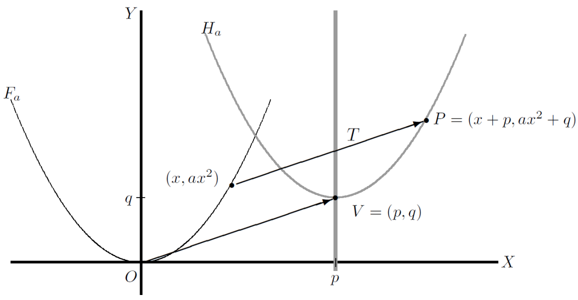
ir

$$h_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ su reikšmėmis } h_a(x) = a(x-p)^2 + q \text{ kiekvienam } x \in \mathbb{R},$$

čia $p \in \mathbb{R}$ ir $q \in \mathbb{R}$. Priminsime, kad funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra lygi funkcijai $g\colon Y \to \mathbb{R}$, rašoma $f = g$, jei $X = Y$ ir $f(x) = g(x)$ kiekvienam $x \in X = Y$. Funkcijų lygybės samprata įgalina teigti, kad kvadratinė funkcija $f = f_a$, kai $b = c = 0$. Kai $p = q = 0$, tai $f_a = h_a$. Priešingu atveju funkcijos grafikas h_a yra kongruentus funkcijos f_a grafikui. Tiksliau teisingas sekantis teiginys.

9 teorema. *Tegul $a \neq 0$, $p \neq 0$ ir $q \neq 0$. Funkcijos h_a grafikas yra kongruentus funkcijos f_a grafikui atžvilgiu transformacijos $T(x,y) = (x+p, y+q)$ su kiekvienu plokštumos tašku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Funkcijų f_a ir h_a grafikus pažymėkime raidėmis F_a ir H_a, atitinkamai. Grafiką F_a sudaro visos sutvarkytos poros (x, ax^2) kiekvienam realiajam skaičiui x, o grafiką



19 pav. Parabolių postūmis.

H_a sudaro visos sutvarkytos poros $(x, a(x-p)^2+q)$ kiekvienam realiajam skaičiui x. Abu grafikai pavaizduoti 19 pav. kai $a > 0$.

Reikia įrodyti, kad $T(F_a) = H_a$. Aibių lygybei įrodyti pakanka įrodyti šiuos du poaibių sąryšius

$$T(F_a) \subset H_a \quad \text{ir} \quad H_a \subset T(F_a).$$

Pirma, įrodysime, kad $T(F_a) \subset H_a$. Tegul $P \in T(F_a)$. Tai reiškia, kad $P = T(x, ax^2)$ su kažkuriuo $x \in \mathbb{R}$. Naudodami transformacijos T išraišką, gauname lygybes

$$\begin{aligned} P = T(x, ax^2) &= \bigl(x+p, ax^2+q\bigr) \\ &= \bigl((x+p), a((x+p)-p)^2+q\bigr) \\ &= \bigl(u, a(u-p)+q\bigr), \end{aligned}$$

kai $u = x+p \in \mathbb{R}$. Tai rodo, kad $P = (u, h_a(u))$. Įrodėme, kad $P \in H_a$.

Antra, įrodysime, kad $H_a \subset T(F_a)$. Tegul $P \in H_a$. Tai reiškia, kad $P = (x, h_a(x))$ su kažkuriuo $x \in \mathbb{R}$. Naudodami transformacijos T išraišką, gauname lygybę

$$\begin{aligned} P = (x, a(x-p)^2+q) &= ((x-p)+p, a(x-p)^2+q) \\ &= T(x-p, a(x-p)^2) \\ &= T(v, av^2), \end{aligned}$$

kai $v = x-p \in \mathbb{R}$. Kadangi $(v, av^2) \in F_a$, tai $P \in T(F_a)$. Lygybės $T(F_a) = H_a$ įrodymas baigtas.

Savo ruožtu, kai $a \neq 1$, funkcijos f_a grafikas yra panašus į funkcijos f_1 grafiką. Tiksliau teisingas sekantis teiginys.

10 teorema. *Tegul $a \neq 0$ ir $a \neq 1$. Dilatacija D su centru taške $(0,0)$ ir koeficientu a atvaizduoja funkcijos f_a grafiką į funkcijos f_1 grafiką.*

Įrodymas. Atveju $a > 0$ parodysime, kad dilatacija D su centru taške $(0,0)$ ir koeficientu a atvaizduoja funkcijos f_a grafiką F_a į funkcijos f_1 grafiką F_1. Kiekvieną tašką $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, D atvaizduoja į (ax, ay). Įrodysime, kad $D(F_a) = F_1$. Tam tikslui pakanka įrodyti, kad

$$D(F_a) \subset F_1 \quad \text{ir} \quad F_1 \subset D(F_a).$$

Sąryšio $D(F_a) \subset F_1$ įrodymui tarkime, kad $P \in D(F_a)$. Tada $P = D(x, ax^2)$ su kuriuo nors $x \in \mathbb{R}$ ir, tęsdami lygybę toliau, gauname

$$P = \left(ax, a^2x^2\right) = \left((ax), (ax)^2\right) \in F_1.$$

Sąryšis $D(F_a) \subset F_1$ teisingas. Atvirkščiai, tegul $P \in F_1$. Tada $P = (t, t^2)$ su kuriuo nors $t \in \mathbb{R}$. Tęsdami lygybę toliau, gauname

$$P = (t, t^2) = \left(a\frac{t}{a}, a^2\frac{t^2}{a^2}\right) = D\left(\frac{t}{a}, a\left(\frac{t}{a}\right)^2\right).$$

Kadangi $Q = \left(\frac{t}{a}, a\left(\frac{t}{a}\right)^2\right) \in F_a$ ir $P = D(Q)$, tai $P \in D(F_a)$. Įrodėme lygybę $D(F_a) = F_1$ atveju $a > 0$.

Dabar tarkime, kad funkcijos f_a parametras $a < 0$. Tegul Λ yra atspindys x-ašies atžvilgiu ir F_{-a} yra funkcijos $f_{-a}\colon x \mapsto (-a)x^2$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas. Aišku, kad $\Lambda(F_a) = F_{-a}$ ir $(-a) > 0$. Taigi F_{-a} yra virš x-ų ašies. Pagal anksčiau įrodytą dalį, dilatacija D' su centru $(0, 0)$ ir koeficientu $(-a)$ atvaizduoja F_{-a} į F_1. Todėl kompozicija $D' \circ \Lambda$ atvaizduoja F_a į F_1 atveju $a < 0$. □

Kadangi figūrų panašumo sąryšis yra tranzityvus ir bet kurių dviejų kvadratinių funkcijų grafikai yra panašūs į funkcijos f_1 grafiką, tai teisingas sekančios išvados teiginys.

1 išvada. *Visų kvadratinių funkcijų grafikai yra panašūs vienas į kitą.*

10 Aksiomos ir apibrėžimai

Apibrėžimai suteikia vardą jau egzistuojantiems matematiniams objektams. Kai kurie geometriniai objektai įvardijami tuo metu, kai daroma prielaida apie jų egzistavimą. Tokios prielaidos ir apibrėžimai formuluoajami šiame skyriuje.

Hilberto aksiomatika grįstoje geometrijoje terminai taškas, tiesė, priklausomumas, tarp ir kongruencija apibrėžiami formuluojant jų savybes aksiomomis. Tolesnis, dažnai akivaizdžių, geometrijos faktų įrodinėjimas remiantis nuoseklia aksiomų sistema reikalauja nuobodaus ir ilgo darbo, nesuteikiančio mokiniui motyvacijos. Geometrijos mokymasis įrodinėjant kiekvieną formaliai naują teiginį klasėje nėra tinkamas pedagogine prasme. Be to, jis reikalauja laiko, kurio klasėje nėra. Sekant [14] ir [12], šiame skyriuje nesilaikoma nuoseklios Hilberto aksiomatikos. Su taško, tiesės ir plokštumos sąvokomis mokiniai gali būti supažindinami neformaliai ir intuityviai:

> Tiesė turi mažiausiai du taškus ir kiekviena tiesė yra plokštumos poaibis. Plokštumoje yra mažiausiai viena tiesė ir esant duotam tiesių baigtiniam rinkiniui yra bent vienas taškas plokštumoje nepriklausantis nei vienai iš tų tiesių.

Norint įrodyti geometrijos faktus bei perteikti geometrinės sistemos loginį nuoseklumą ir hierarchinę struktūrą formuluojamos aštuonios prielaidos, kurias vadiname aksiomomis. Jos nėra nei minimalus aksiomų rinkinys reikalingas visiems teiginiams įrodyti, nei nepriklausomos. Aksiomas suformulavo Hung-Hsi Wu ir jų pagalba įrodė visus tradiciškai mokyklinėje geometrijoje sutinkamus faktus [14] ir [12].

Toliau formuluojamos aksiomos A1–A8, kurios naudojamos įrodyti geometrijos objektų savybes.

(A1) Per du skirtingus taškus eina vienintelė tiesė.

Šiame teiginyje svarbi nurodytos tiesės vienatis.

Dvi tiesės vadinamos *lygiagrečiomis*, jei jos neturi bendro taško. Kitas teiginys yra A1 aksiomos rezultatas.

1 lema. *Dvi skirtingos tiesės arba yra lygiagrečios, arba turi lygiai vieną bendrą tašką.*

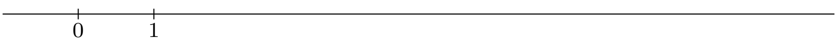
Naudojant aibių terminologiją, pastarąją lemą galima performuluoti taip: dvi skirtingos tiesės arba nesikerta, arba jų sankirtą sudaro lygiai vienas taškas. Lieka svarbus klausimas: kada dvi skirtingos tiesės kertasi ir kada jos nesikerta? Į šį klausimą neįmanoma atsakyti kitaip, kaip darant prielaidą.

(A2) (*Lygiagretumo aksioma*) Duotiems tiesei L ir jai nepriklausančiam taškui P, per tašką P eina ne daugiau kaip viena tiesė lygiagreti L.

Turėdami du taškus A ir B per juos galime nubrėžti tiesę remdamiesi A1 aksioma. Ši tiesė žymima L_{AB} ir vadinama *taškus A ir B jungiančia tiese.* Norint apibrėžti *tiesės atkarpą AB*, reikalingi taškai esantys „tarp A ir B“. Šiai sąvokai apibrėžti galima naudoti kitą prielaidą.

(A3) Kiekvieną tiesę galima paversti skaičių tiese ir bet kuriuos du jos taškus galima padaryti skaičių tiesės 0 ir 1, atitinkamai.

Šioje aksiomoje terminas „skaičių tiesė“ reiškia (geometrinę) tiesę, kurioje pasirinktas, 0 pažymėtas, taškas ir į dešinę nuo jo kitas pasirinktas, 1 pažymėtas, taškas.



Akademinėje matematikoje šis objektas vadinamas „realiąja tiese“.

Remiantis A3 aksioma, tiesėje L_{AB} pasirenkant bet kuriuos du taškus P ir Q, galima juos padaryti skaičių tiesės 0 ir 1, atitinkamai, ir tuo būdu paversti L_{AB} skaičių tiese. Tada, pagal apibrėžimą, taškas C yra *tarp A ir B* (angl. *between A and B*), jei C yra tiesėje L_{AB} ir, šios skaičių tiesės atžvilgiu, teisinga arba $A < C < B$ arba $B < C < A$. Simboliais tai žymima $A \star C \star B$. Šis $\star$ apibrėžimas remiantis skaičių tiesės struktūra yra korektiškas (žr. [14, 167 ir 168 pp.])

Dabar esame pasiruošę apibrėžti atkarpą. *Tiesės atkarpa* arba tiesiog *atkarpa* jungiančia taškus A ir B vadinama visų taškų esančių tarp A ir B kartu su pačiais taškais A ir B aibė. Skaičių tiesėje atkarpa yra tai, kas vadinama *uždaru aprėžtu intervalu.* Taškus A ir B jungianti atkarpa žymima AB. Kadangi sąvokoje „tarp A ir B“ taškai A ir B yra simetriški, tai $AB = BA$. Taškai A ir B atkarpoje AB vadinami jos *galais.*

Daugiakampis.

2 apibrėžimas. Tegul natūralusis skaičius $n \geqslant 3$. n-kampis yra geometrinė figūra plokštumoje, kurią sudaro n skirtingų taškų $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vienoje plokštumoje ir n atkarpų $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ taip, kad

(i) nei viena iš tų atkarpų nesikerta nei su viena kita kitaip negu bendrais galais kaip nurodyta, t. y. A_1A_2 kertasi su A_2A_3 taške A_2 ir t. t. bet nėra kitų sankirtų.

(ii) bet kurie trys nuosekliai sudaryti taškai nėra kolinearūs:

$$A_1, A_2, A_3; \quad A_2, A_3, A_4; \quad \ldots; \quad A_{n-1}A_nA_1.$$

Taškai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vadinami šio n-kampio viršūnėmis, o atkarpos A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, A_nA_1 vadinamos šio n-kampio kraštinėmis arba briaunomis. Daugiakampiu (angl. polygon) vadinamas n-kampis su kuriuo nors $n \geqslant 3$.

Daugiakampis su $n = 3$ vadinamas *trikampiu.*

Aksioma A3 įgalina nurodyti daugiau tiesės plokštumoje savybių. Be to, naudosime iškilumo sąvoką.

3 apibrėžimas. Plokštumos figūra $\mathcal{R}$ vadinama iškiląja, jei bet kuriems jai priklausantiems taškams A ir B atkarpa AB pilnai priklauso figūrai $\mathcal{R}$.

Kita lema įrodyta [14, 173 p.].

2 lema [Tiesės skyrimas]. *Taškas O tiesėje L skiria ją į du netuščius poaibius, L^+ ir L^-, vadinamus taško O* pustiesėmis. *Pustiesės L^+ ir L^- turi šias dvi savybes*:

(i) *Tiesė L yra nesikertančių aibių L^+, L^- ir $\{O\}$ sąjunga, o pustiesės L^+ ir L^- yra iškilos aibės.*

(ii) *Jei du taškai A ir B esantys tiesėje L priklauso skirtingoms pustiesėms, tai taškas O priklauso atkarpai AB.*

Tiesės taško O ir vienos iš to taško pustiesių sąjunga sudaro aibę vadinamą *spinduliu.* Taigi tiesės taškas O apibrėžia du spindulius, išeinančius iš taško O. Bet kuris taško O pustiesės taškas A vienareikšmiškai nusako spindulį, žymimą R_{OA} ir vadinamą *spinduliu iš O į A.* Taškas O vadinamas *spindulio R_{OA} viršūne.* Jei O yra tarp A ir B, tai spinduliai R_{OA} ir R_{OB} turi vieną bendrą viršūnę O ir yra vadinami *priešingais spinduliais.*

(A4) (*Plokštumos skyrimas*) Tiesė L plokštumoje skiria ją į du netuščius poaibius, H^+ ir H^-, vadinamus tiesės L *pusplokšumėmis.* Pusplokštumės H^+ ir H^- turi šias dvi savybes:

(i) Plokštuma yra nesikertančių aibių H^+, H^- ir L sąjunga, o pusplokštumės H^+ ir H^- yra iškilos aibės.

(ii) Jei du taškai A ir B esantys plokštumoje priklauso skirtingoms pusplokštumėms, tai atkarpa AB kerta tiesę L.

Kampas Plačiau apie kampo apibrėžimą žiūrėk [14, 181 p.]

4 apibrėžimas. Pagal A4 aksiomą, tiesė L skiria plokštumą į dvi pusplokštumes. Uždarąja pusplokštume vadinama vienos iš pusplokštumių ir tiesės L sąjunga.

5 apibrėžimas. Tegul taškai A, O, B nėra vienoje tiesėje (nėra kolinearūs). Tegul R_{OA} ir R_{OB} yra du spinduliai su bendra viršūne O. Šiais spinduliais apibrėžtu iškiliuoju kampu vadiname uždarosios pusplokštumės L_{OA}, kuriai priklauso taškas B, ir uždarosios pusplokštumės L_{OB}, kuriai priklauso taškas A, sankirtą.

Iškilasis kampas vienareikšmiškai nusakomas trimis nekolineariais taškais ir vieną iš jų pasirinkus būsima viršūne.

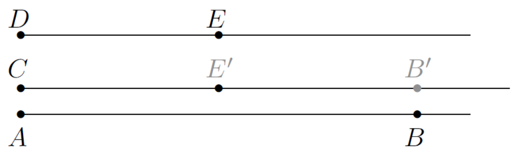
Kai kuriuose vadovėliuose kampą sudaro tik spinduliai. Sritis tarp spindulių nėra priskiriama kampui (žr., pavyzdžiui, [4, 187 p.]). Tokiu atveju kampo dydžio matavimas yra konceptualiai problemiškas.

6 apibrėžimas. Esant teisingoms 5 apibrėžties prielaidoms kampu vadiname spinduliais R_{OA} ir R_{OB} apibrėžtą iškiląjį kampą ir žymime jį simboliu $\angle AOB$. Spindulių R_{OA} ir R_{OB} sąjunga su kampo $\angle AOB$ papildymu vadinama neiškiliuoju kampu ir žymime jį (tuo pačiu) simboliu $\angle AOB$. Spinduliai R_{OA} ir R_{OB} vadinami kampo $\angle AOB$ kraštinėmis, o taškas O vadinamas kampo $\angle AOB$ viršūne.

Kaip čia apibrėžta kampu laikoma viena iš dviejų sričių (iškiloji arba neiškiloji) ribojama dviem spinduliais ir bendra viršūne ir kiekvienas kampas apima abu spindulius. Jei nėra pasakyta priešingai, tai iškiloji sritis vadinama kampu ir žymima simboliu $\angle AOB$. Jei norima kalbėti apie neiškiląjį kampą, tai apie tai reikia pareikšti.

7 apibrėžimas. Tegul taškai A, O, B yra vienoje tiesėje (yra kolinearūs). Jei A ir B yra skirtingose taško O pusėse, tai ištiestiniu kampu $\angle AOB$ vadinama bet kuri uždaroji pusplokštumė L_{AB}, taškas O vadinamas ištiestinio kampo viršūne. Jei A ir B yra tame pačiame spindulyje išeinančiame iš taško O, tai $R_{OA} = R_{OB}$, spindulys R_{OA} vadinamas nuliniu kampu, o visa plokštuma vadinama pilnuoju kampu atžvilgiu R_{OA}.

Atstumas plokštumoje ir atkarpos ilgis Šios sąvokos susijusios su matavimų tema. Jų problemiškumą aiškina H.H.-Wu čia [14, 183 p.]. Klausimas: Kas yra atkarpos ilgis? Atrodytų į šį klausimą atsako A3 aksioma, nes, pratęse atkarpą iki tiesės, galime ją paversti skaičių tiese. Atkarpos ilgis skaičių tiesėje yra galus atitinkančių skaičių skirtumo modulis. Toks ilgio apibrėžimas daro jį priklausomu nuo vienetinės atkarpos pasirinkimo skaičių tiesėje.



20 pav. Atkarpos ilgio apibrėžimas.

Kitaip paaiškinsime atkarpos ilgio apibrėžimo problemiškumą. Tarkime, kad apatinėje ir viršutinėje tiesėse esančių atkarpų AB ir DE ilgiai lygūs vienam. Inuityviai kalbant, apatinę tiesę pastūmus ant vidurinės tiesės, taškas A sutaps su C, o taškas B sutaps su B'. Kadangi atkarpos stūmimas neturėtų keisti jos ilgio (apie tai kalbama

A7 aksiomoje), atkarpos CB' ilgis taip pat turėtų būti lygus vienam. Analogiškai viršutinę tiesę pastūmus žemyn ant vidurinės tiesės, taškas D sutaps su C, o taškas E sutaps su E'. Panašiai, kadangi atkarpos stūmimas neturėtų keisti jos ilgio, atkarpos CE' ilgis taip pat turėtų būti lygus vienam. Akivaizdu, kad atkarpų CB' ir CE' ilgiai negali būti kartu lygūs vienam, turime prieštaravimą.

Sekančia aksioma daroma prielaida, kad atstumą ir atkarpos ilgį galima apibrėžti išvengiant minėtų prieštaravimų.

(A5) Bet kuriems dviems plokštumos taškams A ir B galima priskirti skaičių $d(A,B)$, vadinamą *atstumu tarp A ir B*, kuriam teisinga

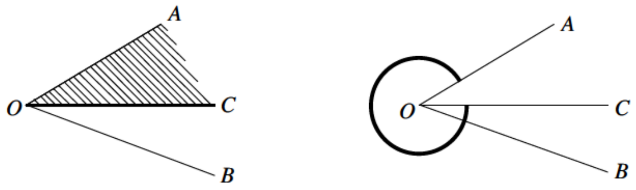
- (i) $d(A,B) = d(B,A)$ ir $d(A,B) \geqslant 0$. Be to, $d(A,B) > 0$ tada ir tik tada, kai $A \neq B$.
- (ii) Turint spindulį, kurio viršūnė yra O ir turint teigiamą skaičių r, ant spindulio egzistuoja vienintelis taškas B toks, kad atstumas $d(O,B) = r$.
- (iii) Tegul O ir A yra tokie du taškai tiesėje L, kad $d(O,A) = 1$, tegul O ir A yra 0 ir 1 skaičių tiesėje L. Tada bet kuriems dviem taškams P ir Q tiesėje L, atstumas $d(P,Q)$ yra lygus atkarpos PQ ilgiui $|PQ|$ skaičių tiesėje L.
- (iv) Jei A, B, C yra kolinearūs taškai, o C yra tarp A ir B, tai

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B).$$

Pagal (ii) turime, kad bet kuriam duotam skaičiui r ir plokštumos taškui O yra daugybė taškų A nutolusių nuo O atstumu r, vienas taškas A kiekvienam spinduliui išeinančiam iš O. Be (ii) neturėtų prasmės (iii), nes būtų neaišku kodėl tiesėje L turėtų egzistuoti toks taškas A, kad $d(O,A) = 1$. Tokiu atveju (iii) savybės esmė tame, kad atstumas tarp tiesės taškų ir atitinkamas ilgis skaičiuojamas pagal skaičių tiesę sutampa. Atkarpos $[P,Q]$ ilgis skaičių tiesėje žymimas $|PQ|$ ir apskaičiuojamas $|P-Q|$, čia P ir Q žymi taškus atitinkančius skaičius, o $|x|$ žymi skaičiaus x absoliučią reikšmę.

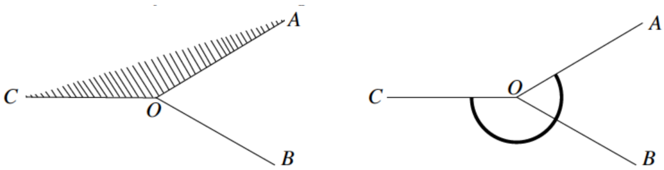
Kampo dydis laipsniais Kita aksioma apibrėžia kampo laipsnio sąvoką. Kampo dydis yra savybė apibūdinanti kampo užimamos srities plokštumoje didumą. Pagal 5 ir 6 apibrėžimus, ši sritis gali būti iškiloji arba ne iškiloji. Konkrečiai trys nekolinearūs taškai A, O ir B apibrėžia du spindulius R_{OA} ir R_{OB} su bendra viršūne O. Tada $\angle AOB$ yra arba uždarosios pusplokštumės L_{OA}, kuriai priklauso taškas B ir uždarosios pusplokštumės L_{OB}, kuriai priklauso taškas A, sankirta (tai iškilasis kampas), arba šios sankirtos papildymas plokštumoje kartu su spinduliais R_{OA} ir R_{OB} (tai ne iškilasis kampas).

Toliau apibrėžiama gretutinio kampo sąvoka. Sakome, kad du kampai $\angle AOC$ ir $\angle COB$ su bendra kraštine R_{OC} yra *gretutiniais atžvilgiu kampo $\angle AOB$*, jei C priklauso $\angle AOB$ (kaip plokštumos sričiai; pabrėšime, kad $\angle AOB$ gali būti tiek iškilasis, tiek ir ne iškilasis kampas), o $\angle AOC$ ir $\angle COB$ yra $\angle AOB$ poaibiai. Pavyzdžiui, jei $\angle AOB$ yra iškilasis kampas, tai 21 piešinio kairėje pavaizduotas $\angle AOC$ yra iškilasis kampas (užbrūkšniuota sritis), o dešinėje pusėje yra ne iškilasis kampas (pažymėtas lanku).



21 pav. Iškiliojo kampo atvejis.

Kita vertus, jei $\angle AOB$ nėra iškilasis kampas, tai 22 piešinio kairėje pavaizduotas $\angle AOC$ yra iškilasis kampas (užbrūkšniuota sritis), o dešinėje pusėje yra ne iškilasis kampas (pažymėtas lanku).



22 pav. Ne iškiliojo kampo atvejis.

Gretutiniai kampai $\angle AOC$ ir $\angle COB$ (atžvilgiu $\angle AOB$) yra atkarpų AC ir CB (kai C yra tarp A ir$B$) analogai tarp kampų.

(A6) Kiekvienam kampui $\angle AOB$ galima priskirti skaičių $|\angle AOB|$, vadinamą jo laipsniu, kuriam teisinga.

(i) $0 \leqslant |\angle AOB| \leqslant 360°$, čia ° yra laipsnių simbolis.

(ii) Duotiems spinduliui R_{OB} ir tokiam skaičiui x, kad $0 < x < 360$ ir $x \neq 180$, tarkime yra pasirinkta tiesės L_{OB} viena iš dviejų uždarų pusplokštumių. Tada yra vienintelis spindulys R_{OA} gulintis pasirinktoje tiesės L_{OB} uždaroje pusplokštumėje toks, kad $|\angle AOB| = x°$, čia $\angle AOB$ žymi iškilą kampą, jei $x < 180°$, ir neiškilą kampą, jei $x > 180°$.

(iii) $|\angle AOB| = 0°$ tada ir tik tada, kai $\angle AOB$ yra nulinis kampas; $|\angle AOB| = 180°$ tada ir tik tada, kai $\angle AOB$ yra ištiestinis kampas; $|\angle AOB| = 360°$ tada ir tik tada, kai $\angle AOB$ yra pilnasis kampas.

(iv) Jei kampai $\angle AOC$ ir $\angle COB$ yra gretutiniai atžvilgiu kampo $\angle AOB$, tai
$$|\angle AOC| + |\angle COB| = |\angle AOB|.$$

Dėka (i) teiginio pastarojoje aksiomoje, bet kurio laipsnių skaičiaus dydžio kampo egzistavimas sekančioje aksiomoje garantuoja bet kurio laipsnių skaičiaus posūkio aplink tašką egzistavimą.

Anksčiau padarytos prielaidos apie pagrindines izometrijos yra apjungiamos sekančia aksioma.

(A7) Pagrindinės izometrijos (posūkis, atspindys ir postūmis) turi šias savybes:

(i) Pagrindine izometrija tiesė atvaizduojama į tiesę, spindulys atvaizduojamas į spindulį ir atkarpa atvaizduojama į atkarpą.

(ii) Pagrindine izometrija išsaugomi atkarpų ilgiai ir kampų dydžiai.

Galiausiai paskutinė aksioma reikalinga plokštumos geometrijai. Šią aksiomą galima būtų įrodyti naudojant A4 aksiomą, bet tai per daug sudėtinga mokyklinei matematikai (žr. [14, 250 p.]).

(A8) Turint iškiląjį kampą AOB, kiekvienam taškui C esančiam $\angle AOB$ ir nelygiam O, spindulys R_{OC} kerta atkarpą AB.

11 Diskusija ir išvados

Penktos klasės vadovėlių turiniai geometrinių transformacijų atžvilgiu yra parašyti pagal 2022 m. programos nuostatas. Šias programos nuostatas atitinka ir 1991 m. vadovėlis [1, 103, 267 ir 272 pp.]. Bet matematiniu pagrįstumo griežtumu šių vadovėlių turiniai transformacijų tema skiriasi. Išvada: kaip įgyvendinamos programos nuostatos priklauso nuo vadovėlių autorių požiūrių į tuos pačius klausimus ir jų matematinės kvalifikacijos. Tikėtina, kad būsimi kitų klasių vadovėliai išleisti skirtingų leidyklų gali skirtingai interpretuoti kitas programos nuostatas. Šis straipsnis siūlo aksiomų sistema pagrįstą mokyklinės geometrijos mokymo ir mokymosi trajektoriją.

Palyginsime kvadratinės funkcijos temą pagal matematikos programą, kaip ši tema atskleidžiama [3, 8 ciklas] vadovėlyje ir kas apie kvadratinės funkcijos grafiką teigiama šio straipsnio 9 skyrelyje. Pagal 2022 m. patvirtintą matematikos programą kvadratinė funkcija nagrinėjama 9 (I gimnazijos) klasėje. Ten rašoma:

> Sprendžiami uždaviniai, kai realaus gyvenimo situacijoms tyrinėti ir modeliuoti – eksperimento duomenims aprašyti – taikomos (pasitelkiamos) funkcijos. <...> Išnagrinėjus kvadratine funkcija aprašomus eksperimento duomenis, įvedama kvadratinė[s] funkcijos $y = ax^2 + bx + c$, kai $a \neq 0$, sąvoka, braižomi jos grafiko (parabolės) eskizai. Tyrinėjama, kaip parabolės padėtis priklauso nuo a ir $D = b^2 - 4ac$ reikšmių. Naudojantis skaitmeninėmis priemonėmis, tyrinėjama, kaip, taikant transformacijas, <...> iš funkcijos $y = x^2$ grafiko gauti funkcijos $y = a(x-m)^2+n$ grafiką. Sprendžiami uždaviniai, kuriuose įvairios realaus pasaulio situacijos yra modeliuojamos funkcijomis: <...>, $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x - m)^2 + n$, $y = (x - x_1)(x - x_2)$.

Apžvelgsime kvadratinės funkcijos temos nagrinėjimą [3, 8 ciklas] vadovėlyje. Pirma, brėžiami funkcijos $y = ax^2$ grafiko eskizai su konkrečiomis koeficiento a reikšmėmis [3, 97 p.]. Formuluojamos taisyklės – kuo didesnė a reikšmė, tuo arčiau Oy ašies yra parabolės šakos. Taip pat, parabolės šakų kryptis priklauso nuo a ženklo.

Antra, formuluojama taisyklė kaip, remiantis funkcijos $f(x) = ax^2$, gauti funkcijos $g(x) = ax^2+c$ grafiką ir kaip ištirti šią funkciją [3, 101 p.]. Būtent, nubraižius parabolę $y = ax^2$ paskui jos taškus paslinkus: c vienetų aukštyn, jei $c > 0$ ir $-c$ vienetų žemyn, jei $c < 0$.

Trečia, atsakoma į klausimą kaip nubraižyti funkcijų $f(x) = a(x - m)^2$ ir $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ grafikus ir kaip ištirti šias funkcijas. [3, 108 p.] formuluojama taisyklė. Funkcijos $f(x) = a(x - m)^2$ grafiką galima gauti pirmiausia koordinačių plokštumoje nubraižius parabolę $y = ax^2$, paskui jos taškus paslinkus: $-m$ vienetų į kairę, kai $m < 0$, arba m vienetų į dešinę, kai $m > 0$; n vienetų aukštyn, kai $n > 0$, arba $-n$ vienetų žemyn, kai $n < 0$.

Ketvirta, atsakoma į klausimą kaip nubraižyti funkcijos $f(x) = ax^2+bx+c$ grafiką, kaip ją ištirti, ir kaip parašyti brėžinyje pavaizduotos parabolės lygtį. Tuo tikslu formuluojamos naujos taisyklės (žr. [3, 118 p.]) ir sprendžiami jas iliustruojantys uždaviniai.

Penkta, temos nagrinėjimas baigiamas kvadratinių funkcijų savybių taikymu sprendžiant gyvenimiško turinio uždavinius, sprendžiant lygčių sistemas grafiškai ir tam siūloma naudoti kompiuterinę programą „Geogebrą“ [3, 137 p.]).

Viso kvadratinės funkcijos temai skirta 55 puslapiai. Iš jų 1–2 puslapiai tenka apibrėžimams ir terminologijai. Likusioje dalyje – taisyklės ir uždaviniai: 20 uždavinių su sprendimais ir 351 šabloninis uždavinys pagal pasiūlytą sprendimo pavyzdį. Nešabloninės – 6 užduotys, kas sudaro $1,7\%$ nuo 351 šabloninės užduoties. Išvada: kvadratinės funkcijos temos mokymas vadovėlyje grindžiamas taisyklių formulavimu ir jas iliustruojančių uždavinių sprendimu.

Šio straipsnio 9 skyriuje įrodytos dvi teoremos, 10 ir 9 teoremos apie kvadratinės funkcijos grafikus. Jos identifikuoja GT, kurių pagalba iš funkcijos $y = x^2$ grafiko gaunamas funkcijos $y = a(x - m)^2 + n$ grafikas, kaip gal būt numatyta programoje. Tai dilatacijos ir lygiagretaus postūmio kompozicija. Išvada: GT grįsta geometrija įgalina kvadratinės funkcijos temą tyrinėti pasitelkiant matematinį samprotavimą.

Pastarosios išvados apie kvadratinės funkcijos temos traktavimą vadovėlyje ir šiame straipsnyje yra labai skirtingos. Tuo pačiu abu traktavimai dera su matematikos programos formulavimu dėl kvadratinės funkcijos tyrimais. Iš to išplaukia jau anksčiau formuluota išvada. Programos reikalavimai turiniui vienareikšmiškai neapibrėžia turinio vadovėliuose ir turinio, kuris gali būti įgyvendinamas klasėje. Galimi skirtumai yra ypač jautrūs teiginių formuluotėms, kai jie įrodinėjami.

Klausimas, kaip siūloma matematiniu samprotavimu grįsta mokyklinė matematika įtakoja mokinių pasiekimus nagrinėtas menkai. Kai kurie tokių tyrimų rezultatai aptariami H.-H. Wu straipsnyje [11, 56 p.]. Lietuvoje pirmaeiliu uždaviniu yra matematikos mokytojų supažindinimas su samprotavimu grindžiama mokykline matematika.

Apibendrinant, galima teigti, kad programa be vadovėlių ir kitos mokomosios medžiagos negali būti traktuojama kaip užbaigtas mokyklinės matematikos turinio atnaujinimo procesas. Prieš programos atnaujinimą turėtų būti parengtos ir tarpusavyje suderintos pagrindinių mokyklinės matematikos temų mokymosi trajektorijos. Programos, vadovėliai ir mokytojų kompetencijų atnaujinimas turėtų vykti po to, kai sutariama dėl mokymosi trajektorijų Be šiame straipsnyje apžvelgtos Hung-Hsi Wu parengtos transformacijomis grįstos geometrijos temos mokymosi trajektorijos yra kitų svarbių tyrimų apžvalgų ta pačia tema, pavyzdžiui, [2].

Literatūra

[1] L. Atanasianas, V. Butuzovas, S. Kadomcevas, E. Pozniakas, I. Judina. *Geometrija. 7–9 klasė. Versta iš rusų kalbos.* Šviesa, 1991.

[2] J.H. Fife, K. James, M. Bauer. *A learning progression for geometric transformations. (Research Report No. RR-19-01).* Princeton, NJ: Educational Testing Service.

[3] J. Gedminienė, D. Riukienė, I. Šukienė, J. Jačiauskaitė, I. Brazauskienė. *Horizontai. 9 klasė. 2 dalis.* Šviesa, 2023.

[4] P. Katilius. *Geometrijos pagrindai.* Vilnius, Mintis, 1966.

[5] V. Meškauskaitė, V. Pipirienė, Ž. Stundžienė. *Matematika visiems. 5 klasė. 2 dalis.* TEV, 2023.

[6] R. Norvaiša. Sąvokos, terminai ir simboliai matematikos vadovėliuose. *Liet. matem. rink. LMD darbar, ser. B*, **64**:59–74, 2023.

[7] R. Norvaiša. *Transformacijomis grįsta geometrija.* Metodinė priemonė, 2024.

[8] L. Daukšytė-Koncevičienė O. Janušaitienė, A. Ališauskas. *Horizontai. 5 klasė. 2 dalis.* Šviesa, 2023.

[9] H.-H. Wu. *Teaching School Mathematics: Algebra.* American Mathematical Society, 2016.

[10] H.-H. Wu. *Teaching School Mathematics: Pre-Algebra.* American Mathematical Society, 2016.

[11] H.-H. Wu. The content knowledge mathematics teachers need. In Y. Li, W.J. Lewis, J.J. Madden(Eds.), *Mathematics Matters in Education. Essays in Honor of Roger E. Howe*, pp. 43–92. Springer, 2018.

[12] H.-H. Wu. *Algebra and Geometry.* American Mathematical Society, 2020.

[13] H.-H. Wu. *Pre-Calculus, Calculus and Beyond.* American Mathematical Society, 2020.

[14] H.-H. Wu. *Rational Numbers to Linear Equations.* American Mathematical Society, 2020.

[15] M. Šikšnys. *Geometrija. II dalis.* A. Ptašeko knygyno leidinys, 1938.

SUMMARY

Geometric transformations in school geometry

R. Norvaiša

The study delves into the learning progression for school geometry based on transformations proposed by Hung-Hsi Wu. Plane transformations – translations, reflections, rotations, and dilations – are considered. Criteria for the triangle congruence and for triangle similarity, as well as the properties of the graphs of a quadratic function, are proved with their help. Axioms of school geometry used to justify the system of concepts are formulated. The study was motivated by the geometry topic presented in the mathematics curriculum as of 2022 and in the textbooks published.

Keywords: geometric transformations; congruence; dilation; axioms of school geometry