LMD konf. darbai, 50–56
1997, Vilnius

Распределение Пуассона для больших простых чисел

Й. Шяулис* (ВУ)

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящей работе через p, p' будем обозначать простые числа. Функция $\varepsilon(x)$ всегда стремиться к нулю при x, стремящимся к бесконечности. Абсолютные постоянные будем обозначать через $c, c_1, \ldots$. B везде будет величина, ограниченная абсолютной постоянной. Если ограничивающие постоянные зависят от параметра a, то будем писать: $\varepsilon_a(x), c_a, B_a$. Запись $F_x(u) \underset{x\to\infty}{\Longrightarrow} F(u)$ будет означать слабую сходимость функций распределения к предельной функции распределения $F(u)$. Через $\Pi_\lambda(u)$ обозначим функцию распределения пуассоновского закона с параметром λ ($\lambda > 0$).

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] полученный следующий результат о сходимости распределений сильно аддитивных арифметических функций к предельной функции распределения Пуассона.

Теорема 1. *Пусть $\{f_x(m),\ x \geqslant 1\}$ – семейство сильно аддитивных функций, $f_x(p) \in \mathbb{Z}$ для любого простого p и*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{\sqrt{x}<p\leqslant x \\ f_x(p)\neq 0}} \frac{1}{p} = 0. \tag{1}$$

Для того, чтобы

$$\nu_x\Big(m \leqslant x,\ f_x(m) < u\Big) = \frac{1}{[x]}\#\Big\{m \leqslant x,\ f_x(m) < u\Big\} \underset{x\to\infty}{\Longrightarrow} \Pi_\lambda(u) \tag{2}$$

*Работа поддержана грантом Литовского фонда студий и науки.

необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\lim_{x\to\infty} \max_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0}} \frac{1}{p} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)=1}} \frac{1}{p} = \lambda,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\notin\{0,1\}}} \frac{1}{p} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\neq 0}} \frac{\ln p}{p} = 0.$$

Возникает естественный вопрос: не следует ли из соотношения (2) условие (1)? Оказывается, что не следует. Существует такое семейство сильно аддитивных арифметических функций $\{f_x(m),\ x \geqslant 2\}$, $f_x(p) \in \mathbb{Z}$, для которого $\nu_x\big(m \leqslant x,\ f_x(m) < u\big) \underset{x\to\infty}{\Longrightarrow} \Pi_\lambda(u)$, а условие (1) не выполняется.

Условие (1) означает, что аддитивные функции "почти наверное" равны нулю для больших простых, т.е. для простых $p \geqslant \sqrt{x}$. Условие (1) можем заменить на противоположное, т.е. потребовать у аддитивных функций, чтобы они были "почти наверное" равны нулю для малых простых чисел. Оказывается, что в этом случае имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\{f_x(m),\ x \geqslant 1\}$ – семейство сильно аддитивных функций, $f_x(p) \in \mathbb{Z}$ для любого простого p и*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant \sqrt{x}\\ f_x(p)\neq 0}} \frac{1}{p} = 0. \tag{3}$$

Для того, чтобы имело место соотношение (2) *необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)=k}} \frac{1}{p} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\leqslant -1}} \frac{1}{p} = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{u\to\infty} \limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\geqslant u}} \frac{1}{p} = 0. \tag{6}$$

Если для некоторой неограниченно возрастающей последовательности $x = x_n$ ни одно из условий (1), (3) не выполняется, то вопрос о необходимых и достаточных условиях для сходимости $\nu_x\big(f_x(m) < u\big)$ к пуассоновскому закону в случае $f_x(p) \in \mathbb{Z}$ остается открытым.

Пример. Пусть $0 < \lambda < -\ln\ln\frac{e}{2}$, $x \geqslant 2$. Пусть $f_x(m)$ – семейство сильно аддитивных функций такое, что

$$f_x(p) = 0, \quad \text{если} \quad p \leqslant \sqrt{x} \quad \text{или} \quad x^{\frac{1}{2}e^{(1-e^{-\lambda})}} < p \leqslant x,$$

$$f_x(p) = k, \quad \text{если} \quad x^{\frac{1}{2}e^{e^{-\lambda}\left(\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)}} < p \leqslant x^{\frac{1}{2}e^{e^{-\lambda}\left(\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}\right)}},$$

для $k = 1, 2, \ldots$.

Замечаем, что из условия $0 < \lambda < -\ln\ln\frac{e}{2}$ следует ($k \in \mathbb{N}$):

$$\frac{1}{2}e^{e^{-\lambda}\left(\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}\right)} < \frac{1}{2}e^{(1-e^{-\lambda})} = \frac{e}{2e^{1/e^{\lambda}}} < \frac{e}{2e^{1-\ln 2}} = 1.$$

Для любого натурального k имеем, что

$$\begin{aligned}\nu_x\big(m \leqslant x,\ f_x(m) = k\big) &= \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{m\leqslant x\\ f_x(m)=k}} 1 = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)=k}} \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{m\leqslant x\\ p\mid m}} 1 \\ &= \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)=k}} \frac{1}{[x]}\left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)=k}} \frac{1}{p} + \varepsilon(x).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + c + \frac{B}{\ln x}, \qquad x \geqslant 2,$$

то для фиксированного $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \nu_x\big(m \leqslant x,\ f_x(m) = k\big) &= \lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)=k}} \frac{1}{p} \\ &= \ln \frac{\exp\left\{e^{-\lambda}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!}\right)\right\}}{\exp\left\{e^{-\lambda}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right\}} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$
\begin{aligned}
\nu_x\Big(m \leqslant x,\ f_x(m) = 0\Big) &= 1 - \nu_x\Big(m \leqslant x : \exists p|m,\ f_x(p) \neq 0\Big) \\
&= 1 - \nu_x\left(\bigcup_{\substack{\sqrt{x}<p\leqslant x \\ f_x(p)\neq 0}} \Big\{m \leqslant x,\ p|m\Big\}\right) \\
&= 1 - \sum_{\substack{\sqrt{x}<p\leqslant x \\ f_x(p)\neq 0}} \nu_x\Big(m \leqslant x,\ p|m\Big) \\
&= 1 - \sum_{x^{1/2}<p\leqslant x^{(1/2)e^{(1-e^{-\lambda})}}} \frac{1}{p} + \varepsilon(x) \\
&= e^{-\lambda} + \varepsilon_\lambda(x).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\nu_x\Big(m \leqslant x,\ f_x(m) < u\Big) \Rightarrow \Pi_\lambda(u).$$

Однако, как видели

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{\sqrt{x}<p\leqslant x \\ f_x(p)\neq 0}} \frac{1}{p} = 1 - e^{-\lambda} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Необходимость. В работе [1] (см. лемму 6) доказано, что из условия (2) непосредственно следует равенство (5). Пусть $\{g_x(m),\ x \geqslant 1\}$ – семейство сильно аддитивных функций такое, что

$$g_x(p) = \begin{cases} f_x(p), & \text{если } f_x(p) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f_x(p) \leqslant -1. \end{cases}$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
\nu_x\Big(m \leqslant x,\ \big|f_x(m) - g_x(m)\big| > \varepsilon\Big) &\leqslant \nu_x\Big(m \leqslant x : \exists p|m,\ f_x(p) \leqslant -1\Big) \\
&\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p)\leqslant -1}} \frac{1}{p}, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

то в силу (2) и (5) имеем

$$\nu_x\Big(m \leqslant x,\ g_x(m) < u\Big) \underset{x\to\infty}{\Longrightarrow} \Pi_\lambda(u). \qquad (8)$$

Пусть $\{h_x(m),\ x \geqslant 1\}$ еще одно семейство сильно аддитивных функций, для которой

$$h_x(p) = \begin{cases} g_x(p), & \text{если } \sqrt{x} < p \leqslant x, \\ 0, & \text{если } p \leqslant \sqrt{x}. \end{cases}$$

Для любого $\varepsilon > 0$

$$\nu_x\Big(m \leqslant x,\ \big|g_x(m) - h_x(m)\big| > \varepsilon\Big) \leqslant \nu_x\big(m \leqslant x : \exists p|m,\ p \leqslant \sqrt{x},\ g_x(p) \neq 0\big) \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant \sqrt{x} \\ f_x(p) \geqslant 1}} \frac{1}{p}. \tag{9}$$

Из условий (3) и (8) получаем, что

$$\nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) < u\big) \underset{x\to\infty}{\Longrightarrow} \sqcap_\lambda(u). \tag{10}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) = k\big) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \tag{11}$$

для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть k натуральное фиксированное число. $h_x(m) = k$ лишь тогда, если m имеет вид $m = pm'$, где $h_x(p) = k$, $\sqrt{x} < p \leqslant x$, а все простые делители m' не превосходят $\sqrt{x}$. Значит,

$$\begin{aligned} \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) = k\big) &= \nu_x\big(m \leqslant x : \exists p|m,\ \sqrt{x} < p \leqslant x,\ h_x(p) = k\big) \\ &= \nu_x\Bigg(\bigcup_{\substack{\sqrt{x} < p \leqslant x \\ h_x(p) = k}} \big\{m \leqslant x;\ p|m\big\}\Bigg) \\ &= \sum_{\substack{\sqrt{x} < p \leqslant x \\ h_x(p) = k}} \nu_x(m \leqslant x,\ p|m) = \sum_{\substack{\sqrt{x} < p \leqslant x \\ f_x(p) = k}} \frac{1}{p} + \varepsilon(x) \end{aligned} \tag{12}$$

Последнее соотношение и равенство (11) доказывает справедливость условия (4).

Пусть теперь $u > 2$. Аналогично, как равенство (12) можем получить, что

$$\nu_x\Big(m \leqslant x,\ h_x(m) > [u] + \frac{3}{2}\Big) = \sum_{\substack{\sqrt{x} < p \leqslant x \\ f_x(p) \geqslant [u]+3/2}} \frac{1}{p} + \varepsilon(x).$$

Поскольку точка $[u] + \frac{3}{2}$ является точкой непрерывности функции $\sqcap_\lambda(u)$, то используя (10), имеем

$$\limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f_x(p) \geqslant u}} \frac{1}{p} \leqslant \limsup_{x\to\infty} \nu_x\Big(m \leqslant x,\ h_x(m) \geqslant [u] + \frac{3}{2}\Big) = 1 - \sqcap_\lambda\Big([u] + \frac{3}{2}\Big).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $u \to \infty$ получаем равенство (6). Необходимость теоремы доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия (3), (4), (5) и (6). Пусть $g_x(m)$ и $h_x(m)$, $x \geqslant 1$, семейства сильно аддитивных функций, определенных в первой части доказательства. Из равенства (12) имеем, что

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) = k\big) = \lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)=k}} \frac{1}{p} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{13}$$

при $k \in \mathbb{N}$.

Для натурального $K \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}
\nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) \geqslant 1\big) &= \nu_x\big(m \leqslant x,\ 1 \leqslant h_x(m) \leqslant K\big) + \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) > K\big) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) = k\big) \\
&\quad + \nu_x\big(m \leqslant x : \exists p|m, \sqrt{x} < p \leqslant x, h_x(p) > K\big) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \varepsilon_k(x)\right) + B \sum_{\substack{\sqrt{x}<p\leqslant x\\ h_x(p)>K}} \frac{1}{p} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^k}{k!} + \varepsilon_K(x) + B \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p)\geqslant K+1}} \frac{1}{p}\,.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве переходя к верхнему пределу при $x \to \infty$, а потом к пределу при $K \to \infty$, используя (6) получим

$$\limsup_{x\to\infty} \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) \geqslant 1\big) = 1 - e^{-\lambda}.$$

Аналогично

$$\liminf_{x\to\infty} \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) \geqslant 1\big) = 1 - e^{-\lambda}.$$

Значит,

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x\big(m \leqslant x,\ h_x(m) = 0\big) = e^{-\lambda}.$$

Последнее равенство и (13) показывает справедливость соотношения (10). Условие (3) и оценка (9) дает соотношение (8). Наконец из условия (5) и оценки (7) получаем (2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Й. Шяулис, Сходимость к закону Пуассона II. Неограниченные сильно аддитивные функции, *Liet. Matem. Rink.*, **36** (3) (1996), 393–404.

Puasono skirstinys dideliems pirminiams skaičiams

J. Šiaulys

Darbe nagrinėjama, kada $[x]^{-1}\#\{m \leqslant x,\ f_x(m) < u\}$ silpnai konverguoja į Puasono skirstinį. Čia $f_x(m)$, $x \geqslant 1$, yra stipriai adityvios funkcijos, kurioms $f_x(p) = 0$ „beveik visiems“ pirminiams $p \leqslant \sqrt{x}$.