LMD konf. darbai, 59–62
1997, Vilnius

Однородная краевая задача с бесконечным индексом логаритмического порядка для многосвязной области, ограниченной сложным контуром Дини–Липшица*

П. Алекна (ШПИ)

В комплексной плоскости дан контур $L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$, состоящий из m непересекающихся простых дуг L_j, выходящих из начала координат и уходящих в бесконечность под различными углами β_j, причем $0 = \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_m < 2\pi$. Область, заключенную между дугами L_j и L_{j+1}, $j = \overline{1,m}$, $L_{j+1} \equiv L_1$, будем называть криволинейным углом и обозначать D_j.

Пусть $\theta_j(t)$ есть угол, образованный касательной к L_j в точке t и осью абсцисс. Гладкость дуг L_j обозначает, что $\theta_j(t)$ и $\arg t$ непрерывны и существуют пределы $\lim_{t\to\infty, t\in L_j} \theta_j(t) = \beta_j$, $\lim_{t\to\infty, t\in L_j} \arg t = \beta_j$, $j = \overline{1,m}$. Будем считать, что при достаточно большом R в области $\Delta_j = (|z| > R) \cap D_j$ любая прямая, ортогональная к лучу $\arg z = \beta_j$, пересекает L_j не более чем в одной точке.

Определение. Назовем классом B класс функций, аналитических в углах D_j, непрерывно продолжимых на $\widetilde{L}_j = L_j \backslash \{0, \infty\}$ слева и справа и ограниченных в D_j.

Требуется найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z) \in B$ с линией скачков L, предельные значения которой удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \qquad t \in \widetilde{L}, \tag{1}$$

при следующих предположениях относительно коэффициента $G(t)$:

$$\ln|G(t)| \in \mathcal{D}_p(L_j)^{**}, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\arg G(t) \in \mathcal{D}_p(L^0), \qquad L^0 = L \cap (|z| \leqslant R),\ \ p > 0. \tag{3}$$

$$\arg G(t) = \varphi(t)\ln^{\rho_j}|t|, \qquad t \in L_j^* = L_j \backslash L_j^0, \tag{4}$$

где $\varphi_j(t) \in \mathcal{D}\alpha_j(L_j^*)$, $\varphi_j(\infty) = \lambda_j$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \neq 0$, $\rho_j > 0, \alpha_j > \rho_j$.

Из условия (4) следует, что задача (1)–(4) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка многостороннего завихрения ([1], с. 512).

---

* Определение контура Дини–Липшица дано в [3].

** Определение контура $\mathcal{D}_p(L_j)$ дано в [3], [6].

Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка в случае многостороннего завихрения изучена А. Г. Алехно ([4], [5]).

Цель работы – найти условия разрешимости задачи (1)–(4) в классе B, выражаемые через заданные коэффициенты завихрения λ_j и показатели завихрения ρ_j ([2], с. 114). Для этого введем каноническую функцию

$$X(z) := \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau-z)}\right\} = \prod_{j=1}^{m}\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{\ln G(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau-z)}\right\}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Каноническая функция* (5) *задачи* (1)–(4) *обладает следующими свойствами:*

1) $X(z)$ *аналитична в криволинейных углах* D_j, *непрерывна вплоть до их границ и нигде, исключая, быть может, точку* $z=\infty$, *не обращается в нуль;*

2) $X(z)$ *удовлетворяет краевому условию* (1);

3) *для* $X(z)$ *в окресности* $z=\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$|X(z)| = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\lambda_j \ln^{\rho_j+1}|z|}{2\pi(\rho_j+1)} + O(\ln^{\rho_j}|z|)\right]\right\}. \tag{6}$$

Доказательство. В силу условий (2)–(4) $\ln G(t)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица на любом замкнутом контуре $L' \subset \widetilde{L}$. Поэтому из свойств интеграла типа Коши и формул Сохоцкого следует утверждение 1) и 2).

Теперь выясним поведение $X(z)$ при $z\to\infty$. Для этого интеграл

$$h_j(z) = \frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{\ln G(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau-z)}$$

в формуле (5) представим в виде суммы интегралов

$$\begin{aligned} h_j(z) &= \frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{\ln|G(\tau)|}{\tau(\tau-z)}\,d\tau + \frac{z}{2\pi}\int\limits_{L_j^0}\frac{\arg G(\tau)}{\tau(\tau-z)}\,d\tau \\ &+ \frac{z}{2\pi}\int\limits_{L_j^*}\frac{(\varphi_j(\tau)-\lambda_j)\ln^{\rho_j}|\tau|}{\tau(\tau-z)}\,d\tau + \frac{z\lambda_j}{2\pi}\int\limits_{L_j^*}\frac{\ln^{\rho_j}|\tau|}{\tau(\tau-z)}\,d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Первые три интеграла в равенстве (7) в силу условий (2)–(4) ограничены в окрестности $z=\infty$ (для них справедливы леммы 2–4 из [6]).

Для последнего интеграла, используя теорему 2 из [3], получим при $z\to\infty$:

$$\frac{z}{2\pi}\int\limits_{L_j^*}\frac{\ln^{\rho_j}|\tau|}{\tau(\tau-z)}\,d\tau = -\frac{\lambda_j\ln^{\rho_j+1}|z|}{2\pi(\rho_j+1)} + O(\ln^{\rho_j}|z|). \tag{8}$$

Тогда из (5), (7) и (8) получим асимптотическое равенство (6). Лемма 1 доказана.

Теперь выясним, при каких условиях, наложенных на λ_j и ρ_j, каноническая функция $X(z)$ является решением задачи (1)–(4) в классе B.

Лемма 2. *Если в асимптотическом равенстве* (6) *коэффициент при наибольшем показателе логарифма ρ_j положителен, то $X(z) \in B$ и $X(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Если этот коэффициент отрицателен, то $X(z) \notin B$.*

Доказательство. 1 случай. Пусть $\rho = \max_{1 \leqslant j \leqslant m}(\rho_j)$ и $\lambda = \sum_j \lambda_j$, где суммирование ведется по тем индексам j, называемыми в дальнейшем отмеченными [4], для которых $\rho_j = \rho$. Тогда из (6) получим асимптотическое равенство

$$|X(z)| = \exp\left\{\frac{-\lambda_j \ln^{\rho_j+1}|z|}{2\pi(\rho+1)} + O(\ln^\rho |z|)\right\},$$

из которого видно, что при $\lambda > 0$ $X(z) \in B$ и $X(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Если $\lambda < 0$, то $X(z) \notin B$. Если $\lambda = 0$, то продолжим аналогическое исследование для подпоследовательности $\{\rho_{j_k}\}_1^r$, получаемой из $\{\rho_j\}_1^m$ после удаления ее членов с отмеченными индексами. Обозначим $\rho' = \max_k\{\rho_{j_k}\}$ и $\lambda' = \sum_k \lambda_{j_k}$, где суммирование ведется только по отмеченным индексам k, для которых $\rho_{j_k} = \rho'$. Тогда для канонической функции $X(z)$ получим опять три случая в зависимости от знака λ'. После конечного числа таких рассуждений будут исчерпаны все случаи для коэффициентов λ_j и показателей завихрения ρ_j.

2 случай. Пусть среди ρ_j нет наибольшего. Не ограничивая общности, можно считать, что $\rho_j = \rho$ для всех $j = \overline{1, m}$. Тогда из (6) при $\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j > 0$ следует, что $X(z) \in B$ и $X(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Если $\lambda < 0$, то $X(z) \notin B$. Лемма 2 доказана.

Известно ([1, стр. 519], [5]), что общее решение однородной задачи (1) в классе кусочно аналитических и непрерывных вплоть до $\widetilde{L}$ функций (может быть и не ограниченных в окрестности $z = \infty$) дается формулой

$$\Phi(z) = X(z)F(z), \tag{9}$$

где $X(z)$ – каноническая функция (5), а $F(z)$ – произвольная целая функция.

Теорема. *Для того чтобы функция $\Phi(z)$ из формулы* (9) *являлась решением краевой задачи Римана* (1)–(4) *в классе B, необходимо и достаточно, чтобы целая функция $F(z)$ была нулевого порядка роста и на контуре L при всех достаточно больших $|t| > R$ выполнялось неравенство*

$$\ln|F(t)| \leqslant C_F - \operatorname{Re}\left\{\frac{t}{2\pi}\int_{L^*}\frac{\varphi_j(\tau)\ln^{\rho_j}|\tau|}{\tau(\tau-t)}\,d\tau\right\}, \qquad L^* = \bigcup_{j=1}^m L_j^*. \tag{10}$$

Утверждение теоремы устанавливается аналогично ([2], с. 120) с учетом лемм 1 и 2. Неравенство (10) получаем из $\ln|F(t)X(t)| \leqslant C_F$ на контуре L при $|t| > R$ и (5) формулы с учетом равенства (7).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[2] Н. В. Говоров, *Краевая задача Римаса с бесконечным индексом*, Наука, Москва, 1986.

[3] П. Г. Юров, *Неоднородная краевая задача Римаса с бесконечным индексом логарифмического порядка* $\alpha \geqslant 1$, Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам, Казань, 1970, 279–284.

[4] А. Г. Алехно, Краевая задача Римаса с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения, *ДАН БССР*, **25**(8) (1981), с. 681–684.

[5] А. Г. Алехно, Однородная задача Римаса с коэффициентом, имеющим разрыв второго рода, *Известия вузов, Математика*, **2**(333) (1990), 29–34.

[6] П. Алекна, Краевая задача Римаса с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для сложного контура, *Liet. Matem. Rink.*, **35**(2) (1995), 133–140.

Logaritminės eilės begalinio indekso homogeninis kraštinis Rymano uždavinys daugiajungei sričiai, apribotai sudėtiniu Dini–Lipšico kontūru

P. Alekna

Gautos nagrinėjamo uždavinio išsprendžiamumo sąlygos, išreištos per argumento sūkurio koeficientus λ_j ir rodiklius ρ_j, ir bendrojo sprendinio išraiška aprėžtų analizinių funkcijų klasėje B.