LMD konf. darbai, 63–66
1997, Vilnius

О понижении ранга системы дифференциальных уравнений

Ю. Юргайтис (ШПИ)

При построении решений систем дифференциальных уравнений в частных производных с сильным вырождением порядка системы возникает больше трудностей чем в аналитической теории иррегулярных особенностей обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Результаты теории регулярных особенностей обыкновенных дифференциальных уравнений нетрудно обобщаются для систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка [2]. В данной работе рассмотрим систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сильным вырождением порядка системы. В матричной форме записи эта система имеет следующий вид:

$$x^{p+1}\Big(E\frac{\partial u}{\partial x} + I_1\frac{\partial u}{\partial y} + I_2\frac{\partial u}{\partial z}\Big) + A(x, y, z)u = 0, \tag{1}$$

где E – единичная матрица, I_1 и I_2 – матрицы вида $I_1 = \|e_{ij}^k\|_{i,j=1}^4$, $k = 1, 2$, $e_{i5-i}^1 = \operatorname{sgn}(2-i)$, $e_{31}^2 = e_{24}^2 = 1, e_{13}^2 = e_{42}^2 = -1$, а остальные элементы этих матриц нулевые, $u(x, y, z)$ – искомый четырехмерный вектор-столбец, x, y, z – независимые комплексные переменные, p – целое неотрицательное число. Для матрицы-функции $A(x, y, z)$ справедливо разложение

$$A(x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu(y, z)x^\mu. \tag{2}$$

Ряд (2) сходится в некоторой окрестности $x = 0$. В точках гиперплоскости $x = 0$ сильно вырождается порядок системы (1). Число p по аналогии с теорией вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3]) назовем рангом системы (1).

В работе [4] показано, что ранг вырождающейся в точке системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно понизить. Ранг систем дифференциальных уравнений понижают потому, что гораздо проще решать системы или уравнения более низкого ранга. Понизим ранг системы (1). Для этого вместо искомой функции $u(x, y, z)$ введем новые искомые функции $u^{(k)}(x, y, z)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, подстановкой

$$u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p-1} x^k u^{(k)}(x, y, z). \tag{3}$$

Подстановка (3) в (1), приводит к следующему соотношению:

$$\sum_{k=0}^{p-1}\Big[x^{p+k+1}\Big(E\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}+I_1\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}\Big) + kx^{p+k}Eu^{(k)}+x^kA(x,y,z)u^{(k)}\Big]=0. \tag{4}$$

Степенной ряд (2) представим в виде

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}x^{\mu}A_{\mu}(y,z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{p-1}x^{\mu p+\nu}A_{\mu p+\nu}(y,z) \tag{5}$$

и, воспользовавшись этим соотношением, из (4) получаем

$$\sum_{k=0}^{p-1}\Big[x^{p+k+1}\Big(E\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}+I_1\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}\Big) + kx^{p+k}Eu^{(k)}+x^k\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{p-1}x^{\mu p+\nu}A_{\mu p+\nu}u^{(k)}\Big]=0. \tag{6}$$

Поменяв порядок суммирования, нетрудно убедиться, что справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{p-1}x^k\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{p-1}x^{\mu p+\nu}A_{\mu p+\nu}u^{(k)}=\sum_{k=0}^{p-1}x^k\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{p-1}x^{\mu p+\nu}A_{\mu p+k}u^{(\nu)}. \tag{7}$$

Воспользовавшись соотношением (7), равенство (6) перепишем в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{p-1}\Big[x^{p+1}\Big(E\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}+I_1\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}\Big) + kx^{p}Eu^{(k)}+\sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{\infty}x^{\mu p+\nu}A_{\mu p+\nu}u^{(k)}\Big]x^k=0. \tag{8}$$

Из (8), приравнивая нулю коэффициенты при степенях x^k, $k=0,1,\ldots,p-1$, получаем

$$x^{p+1}\Big(E\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}+I_1\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}\Big) + kx^{p}Eu^{(k)}+\sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{\infty}x^{\mu p+\nu}A_{\mu p+\nu}u^{(\nu)}=0, \qquad k=0,1,\ldots,p-1. \tag{9}$$

Таким образом уравнение (1) свели к системе (9) из p уравнений. Если учесть то, что матричное уравнение (1) состоит из 4 уравнений, то систему четырех уравнений ранга p свели к системе из $4p$ уравнений того же ранга.

Теперь в систему (9) введем новые искомые функции следующим образом:

$$u^{(k)}(x, y, z) = v^{(k)}(t, y, z), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, p-1, \tag{10}$$

где $t = x^p$.

Дифференцируем (10) по переменным x, y, z. Производные по переменному x заменяем производными по переменному t, вместо x подставляем $t^{1/p}$ и из (9) получаем

$$\begin{aligned} &pt^2 E\frac{\partial v^{(k)}}{\partial t} + t^{\frac{p+1}{p}}\left(I_1\frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} + I_2\frac{\partial v^{(k)}}{\partial z}\right) + ktEv^{(k)} \\ &+\sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{\infty} t^{\frac{\mu+\nu}{p}} A_{\mu p+k} v^{(k)} = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned} \tag{11}$$

Ранг системы из $4p$ уравнений (11) равен 1. Значит ранг системы (1) понизили до 1. Система (11) состоит из p матричных уравнений. Запишем систему (11) в матричной форме. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &v(t, y, z) = colon(v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(p-1)}), \\ &J = diag(E, E, \dots, E), \\ &J_1 = diag(I_1, I_1, \dots, I_1), \\ &J_2 = diag(I_2, I_2, \dots, I_2), \\ &J_3 = diag(O, E, 2E, \dots, (p-1)E), \\ &B_\mu(y, z) = (A_{\mu+k+\nu}(y, z)), \quad k, \nu = 1, 2, \dots, p, \quad \mu = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{12}$$

где O квадратная четырехмерная матрица, все элементы которой равны нулю. Используя обозначения (12) систему (11) можно переписать в виде

$$pt^2 J\frac{\partial v}{\partial t} + t^{\frac{p+1}{p}}\left(J_1\frac{\partial v}{\partial y} + J_2\frac{\partial v}{\partial z}\right) + J_3 t v + \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu(y, z) t^{\frac{\mu}{p}} v = 0. \tag{13}$$

Наконец несколько слов о структуре блочных матриц $B_\mu(y, z)$, $\mu = 0, 1, \dots$ Матрица $B_0(y, z)$ из (13) имеет следующую структуру:

$$B_0 = \begin{pmatrix} A_0 & O & O & \dots & O \\ A_1 & A_0 & O & \dots & O \\ A_2 & A_1 & A_0 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p-1} & A_{p-2} & A_{p-3} & \dots & A_0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Структуру остальных блочных матриц $B_\mu(y, z)$, $\mu = 1, 2, \dots$, нетрудно получить воспользовавшись последним из обозначений (12). В этом обозначении k – номер ряда, ν – номер столбца соответствующего блока. Заметим также, что $A_l \equiv 0$, при $l < 0$.

Замечание. Рассмотренный в работе метод понижения ранга системы сильным вырождением порядка можно успешно применять и к более сложным системам первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

[2] А. И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Наука СО, Новосибирск, 1979.

[2] Д. Юргайтис, О структуре решений вырождающейся эллиптической системы, *Liet. Matem. Rink.*, **33**(3) (1993), 293–301.

[3] В. Вазов, *Асимптотическое разложение решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва, 1968.

[4] H. L. Turritin, Reducing the rank of ordinary differential equation, *Duke Mathematical Journal*, **30**(2) (1963), 271–274.

Apie diferencialinių lygčių sistemos rango pažeminimą

D. Jurgaitis

Nagrinėta keturių pirmos eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema, kurios eilė išsigimsta hiperplokštumos taškose. Apibendrintas rango pažeminimo metodas žinomas analizinėje įreguliariai išsigimstančių diferencialinių lygčių teorijoje.