LMD konf. darbai, 74–79
1997, Vilnius

Adaptuotas formalus Kolmogorovo–Čepmeno lygčių sistemos sprendimo algoritmas

Z. Navickas (KTU)

1. Aprašant eilių sistemų modelius arba sprendžiant įvairius mechanikos uždavinius, tenka spręsti taip vadinamas Kolmogorovo–Čepmeno diferencialinių lygčių sistemas, pvz.

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_o(t); \\ p_n'(t) &= \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - (\mu_n + \lambda_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), \qquad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Čia koeficientai $\mu_n > 0$, kai $n \in \mathbf{N}$ bei $\lambda_n > 0$, kai $n \in Z_0$, yra duoti, o $p_n(t)$, $t \geqslant 0$, kai $n \in \mathbf{Z}_0$, ieškomos funkcijos.

Jeigu ieškomas funkcijas $p_n(t)$ surašysime į seką

$$\big(p_0(t), p_1(t), \ldots\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) \overset{\text{def.}}{=} \vec{p}(t),$$

tuomet simboliu $\vec{p}(t)^{\perp}$ žymėsime gautos sekos $\vec{p}(t)$ transponavimą į stulpelį. Tarkime A yra (1) sistemos matrica, sudaryta iš begalinio stulpelių bei eilučių skaičiaus ir turinti (šiuo atveju) tik tris nenulines įstrižaines. Tada (1) lygčių sistemos sprendinys užrašomas taip:

$$\big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big)^{\perp} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right) (c_{n0};\ n \in \mathbf{Z}_0)^{\perp}, \tag{2}$$

čia seka $(c_n;\ n \in \mathbf{Z}_0)$ yra užrašyta pradinių sąlygų visuma, t.y. $p_n(0) = c_{n0}$, $n \in \mathbf{Z}_0$.

Apskritai tarus, (1) sistemai spręsti yra sudaryti ir kitokie sprendimo algoritmai, tačiau jie, kaip taisyklė, yra gana nepatogūs realizuoti kompiuteriu. Šiame darbe pasiūlysime kiek kitokį formalų algoritmą, apibendrinantį (2) sąryšį ir labiau tinkamą realizuoti šiuolaikinėmis skaičiavimo priemonėmis [3]. Tuo pačiu pademonstruosime formalaus skaičiavimo metodiką.

Trumpumo ir paprastumo dėlei apsiribosime tik (1) lygčių sistemos sprendimu, kurį, reikalui esant, galima nesunkiai apibendrinti.

2. Šiuo tikslu pateiksime formaliųjų tiesinių erdvių ir tiesinių operatorių, veikiančių jose, bei algebrų konstrukcijas.

Struktūrą $p(t) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} a_n t^n$, čia $a_n \in \mathbf{R}$, o t – algebrinė sudaromoji, vadinsime formaliąja eilute, nes konvergavimas nenagrinėjamas. Eilučių sudėties, daugybos (Koši prasme) bei daugybos iš skaliaro (realaus skaičiaus) operacijos atliekamos įprastine prasme. (Pastebėsime, kad savo darbuose formaliąsias eilutes jau naudojo L. Oileris, o šiuo metu O. V. Viskovas [1], M. M. Postnikovas [2] ir kt.).

Kadangi, formaliosiose eilutėse nenaudojama ribos sąvoka, tai, šiuo atveju, galima sudėti (sudauginti) tik baigtinį skaičių dėmenų (daugiklių). Taigi sakysime, kad sumuojame ir dauginame formaliai. Kitaip tariant, galioja formalaus sumavimo (daugybos) principas.

Tarkime $\mathbf{F} \overset{\text{def.}}{=} \{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k;\ a_k \in \mathbf{R}\}$. Tuomet formaliųjų eilučių aibė F su sudėties ir daugybos iš skaliaro operacijomis sudarys tiesinę erdvę – algebrinę struktūrą $\langle \mathbf{F};\ +|\mathbf{R}\rangle$. Jeigu prie gautos struktūros, prijungsime formaliųjų eilučių daugybos operaciją, tai gausime komutatyvią, asociatyvią algebrą $\langle \mathbf{F};\ +, \bullet|\mathbf{R}\rangle$ su vienetiniu elementu – formaliaja eilute $p(t) = 1$.

Toliau apibrėšime algebrines operacijas su sekomis, t.y. sudėtį ir daugybą:

$$\big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) + \big(q_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(p_n(t) + q_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big),$$
$$\big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) \cdot \big(q_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(p_n(t) \cdot q_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big),$$
$$c \cdot \big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(xp_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big),$$

čia $p_n(t), q_n(t) \in \mathbf{F}$, o $c \in \mathbf{R}$. Jeigu formaliųjų eilučių sekų aibę pažymėsime simboliu $\mathbf{P}$, tai gausime sekų tiesinę erdvę $\langle \mathbf{P};\ +\mid \mathbf{R}\rangle$ ir sekų komutatyviąją, asociatyviąją algebrą $\langle \mathbf{P};\ +, \bullet \mid \mathbf{R}\rangle$ su vienetiniu elementu – seka $(1, 1, 1, \ldots)$.

Be to, sukonstruosime du, taip vadinamus, postūmio operatorius:

a) postūmio „kairėn" operatorių $\leftarrow$:

$$\leftarrow \big(p_0(t), p_1(t), \ldots\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(p_1(t), p_2(t), \ldots\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(p_{n+1}(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big),$$

b) postūmio "dešinėn" operatorių:

$$\rightarrow \big(p_0(t), p_1(t), \ldots\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(0, p_0(t), p_1(t), \ldots\big) \overset{\text{def.}}{=} \big(p_{n-1}(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big),$$

čia $p_{-n}(t) \equiv 0$, kai $n \in \mathbf{N}$.

Toliau tiesinėje erdvėje $\langle \mathbf{P};\ +|\mathbf{R}\rangle$ bei algebroje $\langle \mathbf{P};\ +, \bullet|\mathbf{R}\rangle$ nusakysime tiesinius operatorius A: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, t.y.

$$A\big(c_1\vec{p}(t) + c_2\vec{q}(t)\big) = c_1 A\vec{p}(t) + c_2 A\vec{q}(t). \tag{3}$$

(Čia ir kitur simbolis „$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$" reiškia „$\mathbf{P}$ vaizduoja į $\mathbf{P}$").

Tarkime, kad tokioje struktūroje

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\big(p_{nk}(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k p_{nk}(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\right)$$

galima formaliai sumuoti, esant bet kuriems skaliarams $c_k \in \mathbf{R}$, t.y. toliau sakysime, kad sekų suma formaliai sumuojama.

1 *pavyzdys*. Sakysime, kad

$$p_{nk}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=k}^{+\infty} a_{nk}^{(j)} t^j,$$

tai struktūroje

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \big(p_{nk}(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \sum_{j=k}^{+\infty} a_{nk}^{(j)t^j;\ n\in\mathbf{Z}_0}\right)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{j} c_k a_{nj}^{(k)}\right) t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right)$$

sumuojame formaliai.

Tiesinį operatorių A vadinsime formaliuoju, jeigu bet kurios formaliai sumuojamos sekų sumos atvaizdis taip pat yra formaliai sumuojama sekų suma.

Savaime suprantama, kad, neturint konvergavimo sąvokos, teturi prasmę tik formalieji operatoriai.

Sudarysime diferencijavimo D ir integravimo L operatorius, kurie formalias eilutes pertvarko taip:

$$D \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k t^{k-1}, \qquad L \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}.$$

Tada sutarsime, kad

$$D\big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) \stackrel{\text{def.}}{=} \big(Dp_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big), \quad L\big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) \stackrel{\text{def.}}{=} \big(Lp_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big).$$

Jeigu pareikalausime, kad operatoriai $\leftarrow$, $\rightarrow$, D ir L tenkintų (3) sąlygą, tai jie taps formaliaisiais operatoriais. Operatoriai $\leftarrow$ ir $\rightarrow$ yra komutatyvūs su operatoriais D ir L, o, be to, $DL = 1$. Čia operatorių sandaugos bei sudėties operacijas suprasime įprasta klasikine prasme, o 1 – vienetinis operatorius.

Pastebėsime, kad formalieji operatoriai (o taip pat, skyrium imant, $\leftarrow$, $\rightarrow$, D bei L) turi daug įvairių savybių, tačiau čia be įrodymo, pavyzdžiui, pateiksime tik vieną teoremą.

TEOREMA 1. *Bet kokį formalųjį operatorių* A: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ *galima išreikšti*

$$A = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty}{}^{*} \sum_{j=0}^{+\infty}{}^{*} a_{rj}^{(k,l)} L^l \rightarrow{}^k D^r \leftarrow{}^j;$$

čia $a_{rj}^{k,l} \in \mathbf{R}$.

(Žvaigždutė prie sumos ženklo parodo, kad, sumuojant pagal nurodytą indeksą, tik baigtinis skaičius koeficientų $a_{rj}^{(k,l)}$ to indekso atžvilgiu yra nelygūs nuliui, kai kiti, tuo tarpu, indeksai yra fiksuoti. Be to, $B^0 \stackrel{\text{def.}}{=} 1$, kai B bet koks tiesinis operatorius).

3. Apibrėšime $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots) \overset{\text{def.}}{=} \vec{\lambda}$, $(0, \mu_1, \mu_2, \ldots) \overset{\text{def.}}{=} \vec{\mu}$. Tada (1) lygčių sistemą galima užrašyti sekančia operatorine lygtimi

$$D\vec{p}(t) = \leftarrow \vec{\mu}\vec{p}(t) - (\vec{\lambda} + \vec{\mu})\vec{p}(t) + \rightarrow \vec{\lambda}\vec{p}(t), \tag{4}$$

jeigu laikysime, kad dvi sekos arba dvi eilutės yra lygios, kai jų atitinkami elementai yra tarpusavyje lygūs.

Pastebėsime, kad visos ankščiau užrašytos „konstrukcijos" panaudotos užrašant (4) sąryšį. Tai parodo tų konstrukcijų sudarymo tikslingumą.

Operatoriaus $A_1 \overset{\text{def.}}{=} \leftarrow \vec{\mu} \bullet -1(\vec{\lambda} + \vec{\mu}) \bullet + \rightarrow \vec{\lambda}\bullet$ veikimą suprasime taip

$$A_1\vec{p}(t) = \leftarrow \vec{\mu}\vec{p}(t) - (\vec{\lambda} + \vec{\mu})\vec{p}(t) + \rightarrow \vec{\lambda}\vec{p}(t).$$

Tada A_1: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ ir yra formalusis. Be to, (4) lygtį galime užrašyti:

$$(D - A_1)\vec{p}(t) = 0.$$

Nesigilindami į operatorių D ir A_1 įvairius sąryšius, parodysime, kad egzistuoja taip vadinamas operatorius – geometrė:

$$g(LA_1) \overset{\text{def.}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (LA_1)^k,$$

t. y., $g(LA_1)$: $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ ir yra formalusis (bet kokią formalių eilučių seką atvaizduoja į formalių eilučių seką, nepažeisdamas formalaus sumavimo principo).

Iš tikrųjų:

$$LA_1\left(\sum_{k=r}^{+\infty} a_{nk}t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right) = L\left(\sum_{k=r}^{+\infty} \tilde{a}_{nk}t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right) = \left(\sum_{k=r+1}^{+\infty} \hat{a}_{nk}t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right).$$

Todėl

$$(LA_1)^m\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{nk}^{(0)}t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right) = \left(\sum_{k=m}^{+\infty} a_{nk}^{(m)}t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right).$$

Taigi

$$g(LA_1)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{nk}^{(0)}t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{nk}^{(j)}\right)t^k;\ n \in \mathbf{Z}_0\right).$$

2 *pavyzdys*. Tiesinis operatorius – geometrė $g(DA_1)$ nėra formalusis operatorius, nes, bendru atveju, juo vaizduojant formalių eilučių seką, į formalių eilučių seką yra pažeidžiamas formalaus sumavimo principas.

Teisinga lygybė: $(g(LA_1))^{-1} = 1 - LA_1$, nes atliekant pertvarkymus

$$\begin{aligned}(1 - LA_1)g(LA_1) &= g(LA_1)(1 - LA_1)\\ &= 1 + LA_1 + (LA_1)^2 + \cdots - (LA_1) - (LA_1)^2 - \cdots = 1,\end{aligned}$$

nepažeidžiamas formalus sumavimo principas.

TEOREMA 2. *Sekų aibėje*

$$(D - A_1)g(LA_1) = D. \tag{5}$$

Įrodymas. Analogiškai, kaip ir anksčiau, galimi pertvarkymai:

$$\begin{aligned}(D - A_1)\big(1 + LA_1 + (LA_1)^2 + \cdots\big)\\ = D + A_1 + A_1(LA_1) + \cdots - A_1 - A_1(LA_1) - \cdots = D.\end{aligned}$$

1 IŠVADA. Iš (5) išplaukia, kad $(D - A_1)g(LA_1)L = 1$.

2 IŠVADA. (4) operatorinės lygties, o tuo pačiu ir (1) lygčių sistemos sprendinį $(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0)$ galime užrašyti taip:

$$\big(p_n(t);\ n \in \mathbf{Z}_0\big) = g(LA_1)(c_{n0};\ n \in \mathbf{Z}_0) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{nk}\frac{t^k}{k!};\ n \in \mathbf{Z}_0\right). \tag{6}$$

Išvados teisingumas išplaukia iš (5) ir lygybės $D(c_{n0};\ n \in \mathbf{Z}_0) = (0, 0, \ldots)$. Be to, $p_n(0) = c_{n0}$.

Toliau iš (6) sąryšio gauname rekurentinę išraišką:

$$(c_{nk+1};\ n \in \mathbf{Z}_0) = A_1(c_{nk};\ n \in \mathbf{Z}_0), \quad k \in \mathbf{Z}_0. \tag{7}$$

3 IŠVADA. Iš (2) ir (6) sąryšių

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right)(c_{n0};\ n \in \mathbf{Z}_0)^{\perp}\right)^{\perp} = g(LA_1)(c_{n0};\ n \in \mathbf{Z}_0).$$

Nesunkiai (6) ir (7) galime realizuoti kompiuteriu, sudarydami simbolinių arba skaitmeninių skaičiavimų programą. Nors kompiuteriu visų koeficientų $\{c_{nk};\ n \in \mathbf{Z}_0\}$ surasti negalima, tačiau randame jų baigtinį skaičių, naudodami kur kas mažesnį aritmetinių operacijų skaičių, lyginant su (2) sprendinio radimo algoritmu.

Be to, (6) lygybė gali būti sėkmingai panaudota atliekant ir kai kuriuos teorinius (1) lygčių sistemos sprendinių tyrimus.

Baigdami pastebėsime, kad sprendžiant konkrečias diferencialines lygtis arba tokių lygčių sistemas, tikslinga sudaryti specialias tiesines erdves bei algebras ir jose apibrėžti specifinius tiesinius operatorius, sudarant optimalias (techninių skaičiavimų požiūriu) rekurentines išraiškas koeficientams (pvz. (7)).

LITERATŪRA

[1] O. V. Viskovas, *Klaisikiniai analizės uždaviniai nekomutatyvios algebros požiūriu*, TSRS MA Matem. Instituto darbai, 177, 1986, 21–32 (rusų k.)

[2] M. M. Postnikovas, *Galua teorijos pagrindai*, Fizmatgiz, 1960 (rusų k.)

[3] Z. Navickas, *Kraštinio uždavinio formali operatorinė išraiška*, Respublikinės konferencijos medžiaga, Kaunas, Technologija, 1994, 49–52.

An adaptive formal algorithm for solving systems of Kolmogorov–Chapmen equations

Z. Navickas (KUT)

An algorithm presented in the paper is oriented for computer realization.