LMD konf. darbai, 100–103
1997, Vilnius

Apie C-redukuojamąsias Kartano erdves

E. Mazėtis

Diferencialinėje geometrijoje šiuo metu svarbią vietą užima diferencijuojamųjų daugdarų su tam tikromis papildomomis struktūromis nagrinėjimas. Iš tokių erdvių išsiskiria metrinės erdvės, kurios yra klasikinių Euklido ir Rymano erdvių natūralūs apibendrinimai. Tai visų pirma Finslerio, Kartano, Kavaguti ir kitos. Finslerio erdvės yra detaliai išnagrinėtos, gauti gilūs rezultatai įvairioms Finslerio erdvėms (žr.[3]). Kitų metrinių erdvių geometrija išnagrinėta mažiau. Šis darbas skirtas C-redukuojamosioms Kartano erdvėms. Kaip žinome, C-redukuojamąsias Finslerio erdves pirmasis pradėjo nagrinėti M. Matsumoto [2], vėliau buvo įrodyta, kad C-redukuojamosios Finslerio erdvės metrika yra arba Randerso metrika, arba Kropinos metrika. C-redukuojamosios Kartano erdvės ištirtos mažiau, ir klausimas, kokios Kartano erdvių metrikos yra C-redukuojamosios, yra atviras ligi šiol. Šiame darbe sukonstruoti du konkretūs C-redukuojamųjų Kartano erdvių pavyzdžiai.

Kartano erdve vadiname n-matę diferencijuojamą daugdarą C_n, kurios parametrizuojamų kreivių $x^i = x^i(t)$ lankų ilgiai skaičiuojami metrinės funkcijos $H\colon T^*C_n \to R$ pagalba pagal formulę

$$S = \int_{t_1}^{t_2} H(x^i(t), y_i(t))\, dt, \tag{1}$$

$(x^i, y_i) \in T^*(C_n), \quad i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n.$

Be to, reikalaujama, kad metrinė funkcija H tenkintų šias sąlygas [1]:

1) H yra antrojo laipsnio homogeninė funkcija kintamųjų y_i atžvilgiu, t.y.,

$$H(x^i, ky_i) = k^2 H(x^i, y_i); \tag{2}$$

2) šios funkcijos hesianas nelygus nuliui visuose erdvės T^*C_n taškuose.

Pažymėkime $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $\partial^i = \partial/\partial y_i$. Tuomet dydžiai

$$g^{ij} = 1/2\partial^i \partial^i H \tag{3}$$

yra simetrinio tenzoriaus komponentės. Tenzorius g^{ij} yra vadinamas Kartano erdvės metriniu tenzoriumi. Iš (2) lygybės seka, kad šis tenzorius tenkina tokias homogeniškumo sąlygas

$$g^{ij} y_i = \frac{1}{2}\partial^i H, \quad \partial^k g^{ij} y_k = 0. \tag{4}$$

Be to, iš (3) lygybės išplaukia, kad erdvės C_n Kartano tenzorius

$$C^{ijk} = \frac{1}{2}\partial^k g^{ij} \tag{5}$$

yra simetriškas pagal visus savo indeksus. Kadangi pagal apibrėžimą $\det \|g^{ij}\| \neq 0$, tai egzistuoja tenzorius g_{ij}, tenkinantis sąlygą

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j. \tag{6}$$

Be to, (3) ir (4) lygybės leidžia užrašyti tapatybę

$$g^{ij}y_iy_j = H. \tag{7}$$

Kadangi Kartano erdvės yra atskiras hiperplokštuminių elementų erdvių atvejis, tai jose galima apibrėžti Finslerio metriką [3]. Vienok, kaip seka iš (3) ir (7) lygybių, tokia metrika sutampa su erdvės C_n metrika, apibrėžta metrinės funkcijos H pagalba.

Kaip ir Finslerio erdvėje apibrėžiame tenzorių h^{ij}

$$h^{ij} = g^{ij} - \frac{1}{4}H^{-1}\partial^i H \partial^j H, \tag{8}$$

kuris tenkina sąlygą

$$h^{ij}y_j = 0 \tag{9}$$

Apibrėžimas. Kartano erdvė C_n yra vadinama C-redukuojama, jei

1) C_n nėra Rymano erdvė;

2) erdvės C_n dimensija didesnė už 2;

3) tenzorius C^{ijk} gali būti užrašytas tokiu pavidalu

$$C^{ijk} = h^{ij}M^k + h^{jk}M^i + h^{ki}M^j, \tag{10}$$

be to, tenzorius M^i tenkina sąlygą

$$M^i y_i = 0. \tag{11}$$

Padauginę (10) lygybę iš g_{ij} ir atsižvelgę į (8) ir (11) tapatybes, gauname

$$M^i = (n+1)^{-1} g_{kh}C^{ikh} \tag{12}$$

Panagrinėkime specialų Kartano metrinės funkcijos H pavidalą

$$H = (\alpha + \beta)^2, \tag{13}$$

čia

$$\alpha = (a^{ij}(x^k)y_iy_j)^{1/2}, \quad \beta = b^i(x^k)y_i, \tag{14}$$

ir a^{ij} yra Rymano metrinio tenzoriaus komponentės, o b^i – kontravariantinio vektoriaus komponentės. Rymano erdvė, kurioje metrika apibrėžiama metrinio tenzoriaus a^{ij} pagalba, vadinama erdvės C_n asocijuota Rymano erdve.

Tegul a_{ij} – tenzoriui a^{ij} atvirkštinis tenzorius. Tuomet pažymime

$$\begin{gathered} b_i = a_{ij}b^j, \quad \rho = b_ib^j, \quad \tau = H^{1/2}\alpha^{-1} = 1 + \beta\alpha^{-1}, \\ 1^i = \partial^i\alpha = a^{ik}y_k/\alpha, \quad 1_i = a_{ik}1^k = y_i/\alpha, \\ p^i = \partial^i H = 2H^{1/2}(1^i + b^i), \quad p_i = 2y_i, \\ \mu = 1^ib_i = b^i1_i. \end{gathered} \tag{15}$$

TEOREMA. *Kartano erdvė su metrine funkcija* (13) *yra C-redukuojamoji.*

Įrodymas. Užrašysime lygybes, išplaukiančias iš (7) ir (15) sąlygų:

$$\mu = \tau - 1, \quad p_i p^i = 4H, \quad \partial^j 1^i = (a^{ij} - 1^i 1^j)\alpha^{-1}. \tag{16}$$

Tuomet metrinio tenzoriaus g^{ij} komponentes galima užrašyti taip:

$$g^{ij} = \tau(a^{ij} - 1^i 1^j) + \frac{1}{4} H^{-1} p^i p^j, \tag{17}$$

o tenzoriaus g_{ij} komponentes:

$$g_{ij} = (a_{ij} - \frac{1}{2} H^{-1/2}(p_i b_j + b_i p_j) + \frac{1}{4} H^{-1}(\rho + \mu) p_i p_j)\tau^{-1}. \tag{18}$$

Tuomet

$$h^{ij} = \tau(a^{ij} - 1^i 1^j) \tag{19}$$

ir tenzoriui C^{ijk} galioja (10) ir (11) lygybės, čia

$$M^i = \frac{1}{4} H^{-1} p^i - \frac{1}{2}\alpha^{-1} 1^i, \tag{20}$$

kas ir įrodo teoremą.

Tegul Kartano erdvės C_n metrinė funkcija H tokia

$$H = \alpha^4 \beta^{-2}, \tag{21}$$

o α ir β yra apibrėžtos (11) lygybėmis. Šiuo atveju

$$p^i = \partial^i H = 2\alpha^3 \beta^{-3}(2\, 1^i \beta - b^i \alpha), \tag{22}$$

ir metrinių tenzorių g^{ij} bei g_{ij} komponentės išreiškiamos sekančiomis lygybėmis:

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \alpha^2 \beta^{-4}(4\beta^2 1^i 1^j + 2\beta^2 a^{ij} - 4\alpha\beta(1^i b^j + b^i 1^j) + 3\alpha^2 b^i b^j) \\ g_{ij} &= \frac{1}{4}\alpha^{-2}\beta^2 a_{ij} + W^{-1}(\beta^2(\alpha^2\rho - 2\beta^2) 1_i 1_j \\ &\quad + \alpha\beta^2(2\beta - \mu\alpha)(b_i 1_j + 1_i b_j) - \alpha^2\beta^2 b_i b_j), \end{aligned} \tag{23}$$

čia

$$W = \alpha^2(6\beta^2 - 8\mu\alpha\beta + 2\alpha^2 + \rho\alpha^2). \tag{24}$$

Šiuo atveju tenzoriaus C^{ijk} komponentės irgi tenkina (10) ir (11) lygybes, kuriose

$$M^i = 1^i \alpha^{-1} - b^i \beta^{-1}. \tag{25}$$

Tokiu būdu, Kartano erdvė C_n su metrika, apibrėžta metrinės funkcijos (21), yra C-redukuojamoji erdvė.

LITERATŪRA

[1] G. Atanasiu, The Kawaguti method of determination of the metrical connections in a Cartan space, *Mem. Sec. Shl. Acad. RSR*, **4** (1985), 43–45.

[2] M. Matsumoto, On C-reducible Finsler spaces, *Tensor*, **24** (1972), 29–37.

[3] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer, 1952.

Über C-reduzierbare Cartanische Räume

E. Mazėtis

Cartanische Raum C_n mit metrischer Funktion H ist C-reduzierbare, wenn Cartanische Tensor die Gleichungen (10) und (11) erfüllt. In dieser Arbeit konstruiert man zwei Beispiele C-reduzierbaren Cartanischen Räumen.