LMD konf. darbai, 245–248
1997, Vilnius

Mažo kreivio arkos stabilumas tamprumo ir valkšnumo sąlygomis

A. Bartaševičius (LŽŪU)

Tiriame mažo kreivio parabolės formos

$$y = \frac{4f}{l}\left(x - \frac{x^2}{l}\right) \quad \left(\frac{f}{l} \ll 1\right)$$

arkos deformacijas ir stabilumą tamprumo ir valkšnumo sąlygomis. Arką veikia kintamo intensyvumo jėga $q = q_0\left(1 - \frac{4f}{l^2}\left(x - \frac{x^2}{l}\right)\right)$.

Arkos elemento ds pusiausvyros lygtys (2 brėž.) yra tokios:

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{\rho} = 0, \quad \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{\rho} + q = 0, \quad \frac{dM}{ds} - Q = 0. \tag{1}$$

Iš šių lygčių gauname vieną pusiausvyros lygtį:

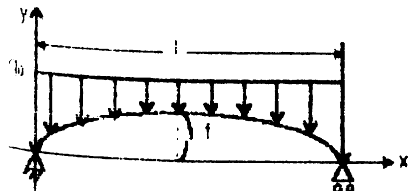
$$M''' + \frac{M'}{\rho^2} + q' = 0, \qquad \frac{1}{\rho} \approx y'' = -\frac{8f}{l^2}. \tag{2}$$

Mažo kreivio arkai diferencijavimas pagal lanką s (2) lygtyje pakeistas pagal x. Tampriai arkai

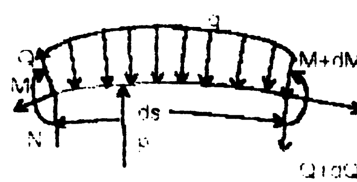
$$M = EI\text{æ}. \text{ Mažiems įlinkiams } \text{æ} \approx u'' - \frac{u}{\rho^2}. \tag{3}$$

Įstatę (3) lygtis į (2) gauname išlinkusios po deformacijos arkos diferencialinę įlinkio lygtį:

$$u^{(v)} - \frac{1}{\rho^4}u' - \frac{4fq_0}{EIl^2}\left(1 - \frac{2x}{l}\right) = 0. \tag{4}$$



1 brėž.



2 brėž.

su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u(1) = 0$, $u''(0) = u''(1) = 0$, $u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

(4) lygties sprendinys turi tokią išraišką:

$$u(x) = c_1 + c_2 \mathrm{ch}\frac{x}{\rho} + c_3 \mathrm{sh}\frac{x}{\rho} + c_4 \cos\frac{x}{\rho} + c_5 \sin\frac{x}{\rho} + x(ax + b), \tag{5}$$

kur $a = \frac{4 f q_0 \rho^4}{E I l^3}$, $b = -\frac{4 f q_0 \rho^4}{E I l^2}$.

Konstantas c_i galima apskaičiuoti panaudojus minėtas kraštines sąlygas.

Toliau tiriame arkos stabilumą tamprumo sąlygomis. Skaičiuojame jėgos intensyvumo $q(x)$ tokią reikšmę, kai arkos pusiausvyra tampa nestabili, t.y. galimos kitos pusiausvyros formos. Tam tikslui (4) lygties apytikslį sprendinį ieškome pavidalu:

$$u(x) = \frac{4f}{l}\left(x - \frac{x^2}{l}\right) + u_0 \sin\frac{k\pi x}{l} \quad (k \geqslant 2). \tag{6}$$

(4) lygčiai spręsti naudojame Galiorkino metodą:

$$\int_0^1 \left(u^{(v)} - \frac{1}{\rho^4}u' - \frac{4 f q_0}{E I l^2}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right) u(x)\, dx = 0. \tag{7}$$

Įstatę (6) išraišką į (7) lygtį ir atlikę skaičiavimus gauname:

$$q_0 = \frac{k^4 \pi^4 E I}{l^3} \ (k \geqslant 2) \quad \text{ir} \quad q_{krit} = q_{0\,min} = \frac{16 \pi^4 E I}{l^3}. \tag{8}$$

Dabar analogišką uždavinį sprendžiame valkšnumo sąlygomis. Naudojame valkšnumo sustiprėjimo teorijos būvio lygį:

$$\dot{p} p^{\alpha} = A \sigma^n \quad (n > \alpha + 1); \tag{9}$$

$$p \approx \varepsilon, \ \sigma = A^{-1/n} \dot{\varepsilon}^{1/n} \cdot \varepsilon^{\alpha/n}, \ \varepsilon = æ y = \left(u'' - \frac{u}{\rho^2}\right) y.$$

$$M = \iint_s \sigma y\, ds = A^{-\frac{1}{n}} \left(\dot{u}'' - \frac{\dot{u}}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(u'' - \frac{u}{\rho^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}} \iint_s y^{\frac{\alpha+1}{n}+1}\, ds,$$

$$M = B\left(\dot{u}'' - \frac{\dot{u}}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(u'' - \frac{u}{\rho^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}}, \quad B = A^{-\frac{1}{n}} \iint_s y^{\frac{\alpha+1}{n}+1}\, ds \tag{10}$$

Įstatę šią momento M lygtį į (2) lygtį gauname:

$$\left(\left(\dot{u}'' - \frac{\dot{u}}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(u'' - \frac{u}{\rho^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\right)''' + \frac{1}{\rho^2}\left(\left(\dot{u}'' - \frac{u}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(u'' - \frac{u}{\rho^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\right)' - \frac{4 f q_0}{l^2 B}\left(1 - \frac{2x}{l}\right) = 0. \tag{11}$$

(11) diferencialinės lygties apytikslį sprendinį ieškome pavidalu:

$$u(x,t) = v(t)u_1(x), \; u_1(x) = \frac{4f}{l}\left(x - \frac{x^2}{l}\right) + u_0 \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{12}$$

$u(x,o) = v(o)u_1(x)$; $v(o) = v_o$, kuris gaunamas iš tampraus uždavinio sprendinio.

Įstatę (12) išraišką į (11) lygtį gauname:

$$\dot{v}^{\frac{1}{n}} v^{\frac{\alpha}{n}} \left(\left(\left(u_1'' - \frac{u_1}{\rho^2} \right)^{\frac{\alpha+1}{n}} \right)''' + \frac{1}{\rho^2} \left(\left(u_1'' - \frac{u_1}{\rho^2} \right)^{\frac{\alpha+1}{n}} \right)' \right) - \frac{4fq_0}{l^2 B}\left(1 - \frac{2x}{l}\right) = 0. \tag{13}$$

(13) lygčiai spręsti naudojame Galiorkino metodą ir (12) išraiškas, t.y.

$$\dot{v}^{\frac{1}{n}} v^{\frac{\alpha}{n}} \int_0^1 \left(\left(\left(u_1'' - \frac{u_1}{\rho^2} \right)^{\frac{\alpha+1}{n}} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\left(u_1'' - \frac{u_1}{\rho^2} \right)^{\frac{\alpha+1}{n}} \right)' \right) u_1 \, dx = \frac{4fq_0}{Bl^2} \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{l}\right) u_1 \, dx. \tag{14}$$

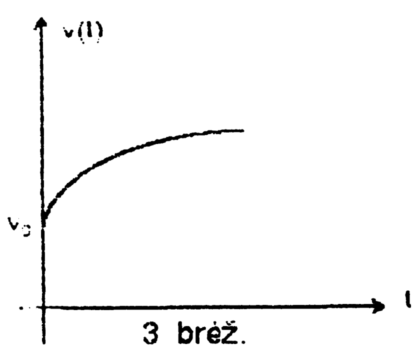
Atlikę skaičiavimus gauname tokią lygtį:

$$\dot{v}^{\frac{1}{n}} \cdot v^{\frac{\alpha}{n}} = 1, \text{ arba } \dot{v}v^{\alpha} = 1. \tag{15}$$

Integruojant (14) lygtį gauta bendra konstanta yra įjungta į laiką t, pagal kurį diferencijuojama funkcija $v(t)$. (15) lygties sprendinys yra toks:

$$v(t) = \sqrt[\alpha+1]{v_0^{\alpha+1} + (\alpha+1)t}. \tag{16}$$

IŠVADA. *Esant nedideliems pradiniams tampriems įlinkiams $v(0) = v_0$ įlinkiai $v(t)$ vėliau didėja, todėl valkšnios arkos pusiausvyra yra nestabili.*



3 brėž.

LITERATŪRA

[1] A. Bartaševičius, Gniuždomo strypo stabilumas tamprumo ir valkšnumo sąlygomis, 35 LMD konferencijos tezės, Vilnius, 1994, 4p.

[2] А. С. Вольмир, *Устойчивость упругих систем*, Физматгиз, Москва, 1963.

[3] Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, Москва, 1966.

The stability of small curving arcs according to the theory of elasticity and creep

A. Bartaševičius

There are solved the deformation and stability small curving arcs according to the theory of elasticity and creep. This soliution shows that arcs bend $v(t)$ increases and the arc equilibrium is not stable.