LMD konf. darbai, 274–276
1997, Vilnius

Sienos apsaugos matematinis modelis

I. Jačiauskas (LKA, VGTU)

Uždavinys formuluojamas diferencialinio lošimo terminais.

Pirmasis lošėjas – potencionalus sienos pažeidėjas P – juda pusplokštumėje $y \geqslant 0$ ir bet kuriuo laiko momentu gali keisti greičio kryptį ir modulį, kuris yra nedidesnis už u. Jo tikslas – nesugautam pasiekti sienos $y = 0$ atkarpą, kurios ilgis yra l.

Antrasis lošėjas – sienos apsauga A. Šis lošėjas sienos apsaugai skiria komandą iš n vienodų narių, kuriuos išdėsto saugomos sienos atkarpoje. Kiekvienas komandos narys gali judėti sienos atkarpa greičiu neviršijančiu $v > u$. Apsaugos narys pastebi pažeidėją, kai nuotolis iki jo h. Apsaugos tikslas – neleisti pažeidėjui pereiti sieną. Apsaugos efektyvumas vertinamas pagal du kriterijus: 1) apsaugos komandos narių skaičių; 2) apsaugos narių bendrą judėjimo kiekio ilgį.

Optimalus apsaugos komandos narių skaičius. Kadangi norime nustatyti mažiausią narių skaičių, tai pakanka nagrinėti tą atvejį, kai pažeidėjas elgiasi optimaliai. Tuomet nereikia nagrinėti persekiojimo, kai pradžioje persekioja vienas narys, o po to kitas. Apsaugos komandos narių skaičius priklauso nuo to ar pažeidėją persekioja vienas narys, ar du nariai.

Tarkime, kad pažeidėją persekioja vienas apsaugos narys, jis yra taške $0(0; 0)$ ir turi kaimynus iš abiejų pusių. Tuomet diferencialinio lošimo barjeras – hiperbolė – išsigimsta į dvi tieses

$$y - \frac{x}{\sqrt{d^2 - 1}} = 0 \quad \text{ir} \quad y + \frac{x}{\sqrt{d^2 - 1}} = 0, \tag{1}$$

čia $d = \frac{v}{u} > 1$.

Pažeidėjo – taško $P_1(x_1; y_1)$ – koordinatės, kuomet jį pastebi apsaugos narys, tenkina lygtį

$$x^2 + y^2 = h^2. \tag{2}$$

Barjero (1) ir apskritimo (2) susikirtimo taško teigiamos koordinatės yra

$$x_1 = \frac{h\sqrt{d^2 - 1}}{d}, \quad y_1 = \frac{h}{d}.$$

Todėl vienas apsaugos narys, kai turi kaimynus iš abiejų pusių, saugo atkarpą, kurios ilgis

$$s = 2x_1 = \frac{2h\sqrt{d^2 - 1}}{d}.$$

Sienos gale saugomos atkarpos ilgis randamas iš sąlygos

$$\frac{s}{v} = \frac{h-s}{u}, \quad \text{t.y.} \quad s = \frac{dh}{d+1}.$$

Tuo atveju, kai pažeidėją persekioja vienas apsaugos narys, apsaugos komanda, susidedanti iš n narių, apsaugo sieną, kurios ilgis

$$s_n' = \frac{2dh}{d+1} + \frac{2(n-1)h\sqrt{d^2-1}}{d}. \tag{3}$$

Komandos, reikalingos sienos apsaugai, mažiausias narių skaičius yra

$$k_1 = \min\{n : s_n' \geqslant l\}.$$

Tarkime, kad pažeidėją persekioja du nariai, esantys skirtingose pažeidėjo pusėse. Jei pažeidėjas yra taške $P_2(x_2; y_2)$, tai jo optimali strategija yra judėti statmenai sienai. Pažeidėjo kelio ilgis yra y_2, o apsaugos nario – x_2, todėl iš sąlygų

$$x_2^2 + y_2^2 = h^2,$$
$$\frac{y_2}{u} = \frac{x_2}{v},$$

gauname

$$x_2 = \frac{hd}{\sqrt{d^2+1}}, \quad y_2 = \frac{h}{\sqrt{d^2+1}}.$$

Komanda, susidedanti iš n narių, apsaugo sieną, kurios ilgis

$$s_n'' = \frac{2dh}{d+1} + \frac{2dh(n-1)}{\sqrt{d^2+1}}. \tag{4}$$

Mažiausias apsaugos komandos narių, reikalingų sienos apsaugai, skaičius yra

$$k_2 = \min\{n : s_n'' \geqslant l\}.$$

Iš (3) ir (4) išplaukia, kad visuomet $k_2 < k_1$, t.y. optimalus komandos narių skaičius yra tuo atveju, kai pažeidėją persekioja du nariai.

Apsaugos narių judėjimo kelio bendras ilgis. Tuo atveju, kai pažeidėją persekioja vienas narys, pažeidėjo optimali strategija – judėti statmenai barjerui. Statmens per tašką $P_1(x_1; y_1)$ lygtis

$$y = -\sqrt{d^2-1}\,x + hd,$$

todėl apsaugos nario judėjimo kelio ilgis yra

$$a_1 = \frac{hd}{\sqrt{d^2-1}}.$$

Jei pažeidėją persekioja du nariai, tai jų bendras judėjimo kelio ilgis yra

$$a_2 = \frac{2hd}{\sqrt{d^2+1}}.$$

Vieno nario persekiojimas yra geresnis pagal judėjimo kelio ilgį, kai $a_1 < a_2$. Ši sąlyga išpildyta, kuomet $d > \sqrt{\frac{5}{3}}$. Tuo atveju, kai $d < \sqrt{\frac{5}{3}}$, dviejų narių persekiojimas yra geresnis pagal du kriterijus: narių skaičių ir judėjimo kelio ilgį.

LITERATŪRA

[1] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, Москва, 1967.
[2] И. Ячяускас, Одна игра преследования на полуплоскости, *Liet. Mat. Rink.*, 7 (1967), 167–170.

A mathematical model of guarding the frontier

I. Jačiauskas

This paper presents a mathematical model og guarding the frontier. Optimization problem is solved according to two criteria: 1) number of guards; 2) according to the length of the guards' moving.