LMD konf. darbai, 277–280
1997, Vilnius

Kombinatorinis diskrečiųjų sistemų valdymo uždavinys

N. Janušauskaitė (KTU)

Tarkime, kad turime diskrečiąją valdomą sistemą, kurios būsena kiekvienu laiko momentu charakterizuojama vektoriumi $x(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_M(t))$, $t = \overline{0, N-1}$. Spręsime optimizavimo uždavinį: rasti minimalią tikslo funkcijos

$$\sum_{t=0}^{N-1}\left(\lambda(t\Delta)V_1x_k(t\Delta) - \frac{V_2}{M - k(t\Delta)}\right)\Delta, \quad \text{kur } k = k(t\Delta). \tag{1}$$

Čia minimizuojame pagal $k = k(t\Delta)$, $t = 0, 1, \dots, N-1$.

Faziniai kintamieji $x_i(t)$, $i = \overline{0, M}$, aprašomi rekurentinėmis lygtimis:

$$\begin{cases} x_0(t+\Delta) = x_0(t) + \Delta\big(\mu(t)x_1(t) - x_0(t)\lambda(t)\big), \\ x_i(t+\Delta) = x_i(t) + \Delta\big(\lambda(t)x_{i-1}(t) - \big(\mu(t)+\lambda(t)\big)\big)x_i(t) + \mu(t)x_{i+1}(t), \\ i = 1, \dots, k(t) - 1, \ k(t) \subset 0\,1, \dots, M \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_{k(t)}(t+\Delta) = x_{k(t)}(t) + \Delta\big(\lambda(t)x_{k(t)-1} - \mu(t)x_{k(t)}(t)\big), \\ x_l(t+\Delta) = x_{l(t)} \\ l = k(t)+1, \dots, M \end{cases} \tag{3}$$

su pradinėmis sąlygomis:

$$x(0) = x^0, \qquad x^0 = \big(x_0^0, x_1^0, \dots, x_M^0\big). \tag{4}$$

Čia V_1, V_2 – duoti skaičiai, o $\lambda(t)$, $\mu(t)$ – tolydžios atkarpoje $[0, T]$ funkcijos, T – duotas skaičius, $N = [T/\Delta]$, $\Delta > 0$.

Pastebėsime, kad suformuluotas uždavinys nepriklauso klasikinių diskrečiųjų valdymo uždavinių klasei. Nauja yra tai, kad valdomos sistemos būsena aprašoma dviejomis skirtingoms sistemomis. Kita vertus, valdymo strategijos $k(\cdot)$ parinkimas aprašo (1) ir (2) sistemų lygčių skaičių; pakeitus valdymo strategiją, atitinkamai pasikeičia (1) ir (2) sistemos lygčių skaičius. Šia prasme uždavinys ir vadinamas kombinatoriniu. (1)–(4) uždavinį spręsime papildomo žingsnio metodu [1]. Jo esmė tokia. Diskretus valdymo uždavinys aproksimuojamas nauju tolydžiu valdymo uždaviniu, kuris sprendžiamas taikant Pontriagino maksimumo principą [2]. Kartu įvertinamas aproksimavimo tikslumas. Paminėsime, kad kita kombinatorinių valdymo uždavinių klasė buvo išnagrinėta darbe [3]. Jie buvo sprendžiami dinaminio programavimo metodu. Kombinatoriniai valdymo uždaviniai dažnai sutinkami ekonomikoje. Kaip pavyzdį paminėsime resursų skirstymo technologiniams procesams uždavinį.

Toliau nagrinėsime (1)–(4) uždavinio sprendimą. Iš (1) ir (4) lygybių, perėję prie ribos, kai $\Delta \to 0$, gauname optimaliojo valdymo uždavinį:

$$I\big(k(\cdot)\big) = \int_0^T \left(\lambda(t)V_1 x_{k(t)}(t) - \frac{V_2}{M - k(t)}\right)dt \longrightarrow \min_{k(\cdot)}, \tag{5}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \big(\lambda(t)A\big(k(t)\big) + \mu B\big(k(t)\big)\big)x(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$x(0) = x^0.$$

Čia $A(k(\cdot))$, $B(k(\cdot))$ yra $(M+1) \times (M+1)$ matavimo kvadratinės matricos

$$A\big(k(\cdot)\big) = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B\big(k(\cdot)\big) = \begin{Vmatrix} A_2 & 0 \\ B_2 & 0 \end{Vmatrix},$$

kur $A_1 = A_1(k(\cdot))$ ir $A_2 = A_2(k(\cdot))$ yra matricos, kurios abi turi $k(\cdot)$ eilučių ir $k(\cdot) + 1$ stulpelių, o matricos $B_1 = B_1(k(\cdot))$ ir $B_2 = B_2(k(\cdot))$ turi $M + 1 - k(\cdot)$ eilučių ir $k(\cdot) + 1$ stulpelių ir užrašomos šitaip:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$B_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

(5)–(6) uždavinio sprendimui taikome papildomo žingsnio metodą bei Pontriagino maksimumo principą.

Optimaliojo valdymo uždavinį su papildomu žingsniu užrašome taip:

$$I_1\big(k(\cdot)\big) = -f_0(v) + \int_0^T \left(\lambda(t)V_1 y_{k(t)} - \frac{V_2}{M - k(t)}\right)dt \longrightarrow \min_{k(t)}, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \big(\lambda(t)A\big(k(t)\big) + \mu(t)B\big(k(t)\big)\big)y(t), \tag{8}$$

$y(0) = x^0 + f(v), \quad v = (v_0, \dots, v_M) \in V(\varepsilon), \qquad V(\varepsilon) = \underbrace{(0, \varepsilon)x(0, \varepsilon)x \cdots x(0, \varepsilon)}_{M+1}.$

Čia $f_0(v)$ – skaliarinė funkcija, $f(v)$ – $(M+1)$-vektorinė funkcija.

Tarkime, kad $f_0(v)$, $f(v)$ – tolydžios aibėje $V(\varepsilon)$ funkcijos.

Pažymėkime

$$\eta(v) = \min_{k(\cdot) \in \bar{u}(v,t)} I_1\bigl(k(\cdot)\bigr), \tag{9}$$

$$\bar{U}(v, t) = \left\{ \bar{k}(t) \,\middle|\, \max_{k(\cdot)} H\bigl(\bar{y}(t), \bar{f}(t), k(t), k\bigr) = H\bigl(\bar{y}(t), \bar{f}(t), \bar{k}(t), t\bigr) \right\}. \tag{10}$$

Hamiltono funkciją užrašome taip:

$$\begin{aligned} H(y, \psi, k, t) = {} & \psi(t)\bigl(\lambda(t)A(k(t)) + \mu(t)B\bigl(k(t)\bigr)\bigr)y(t) \\ & - \left(\lambda(t)V_1 y_{k(t)} - \frac{V_2}{M - k(t)}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Sujungtiniai kintamieji $\psi(t)$ tenkina diferencialinių lygčių sistemą

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(y(t), \psi(t), k(t), t)}{\partial y}, \tag{12}$$

su pradine sąlyga:

$$\frac{\partial f_0(v)}{\partial v} + \frac{\partial f(v)}{\partial v} x(0) = 0.$$

Funkcionalo I_1 aproksimavimo funkcija $\eta(v)$ tikslumą nusako teorema.

TEOREMA. *Jei* $(v^0, k^0(\cdot))$ – *optimalus* (7)–(8) *uždavinio valdymas*, v^0 – *vidinis aibės* $V(\varepsilon)$ *taškas ir egzistuoja skaičiai* M_0 *ir* M_1, *kuriems*

$$0 \leqslant f_0(v) \leqslant M_0\varepsilon, \qquad \|f(v)\| < M_1\varepsilon, \quad \textit{visiems } v \in V(\varepsilon),$$

tuomet

$$0 \leqslant \min_{k(\cdot)} I\bigl(k(\cdot)\bigr) - \min_{k(\cdot), v} I_1\bigl(k(\cdot), v\bigr) < c_0\varepsilon,$$

kai

$$\begin{aligned} c_0 &= M_0 + \frac{V_1\lambda_0 M_1(e^{L_0 T} - 1)}{L_0}, \\ \lambda_0 &= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \lambda(t), \\ L_0 &= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \max_{k(\cdot)} \bigl\|\lambda(t)A\bigl(k(\cdot)\bigr) + \mu(t)B\bigl(k(\cdot)\bigr)\bigr\|. \end{aligned}$$

Teoremą įrodome remdamiesi funkcionalų I_1 ir I analizinėmis išraiškomis bei Gronuolio lema [4].

Tokiu būdu (1)–(4) uždavinio sprendimui galime taikyti tokį algoritmą:

1) Sudarome pagalbinį (7)–(8) uždavinį ir taikydami maksimumo principo schemą randame funkciją $\eta(v)$;

2) Randame funkcijos $\eta(v)$ maksimumą aibėje $V(\varepsilon)$;

3) Apskaičiuojame c_0, tuomet remdamiesi teorema, galime teigti, kad minimalioji funkcionalo I reikšmė apskaičiuota $c_0\varepsilon$ tikslumu.

LITERATŪRA

[1] V. Bistrickas, Apytikslis diskrečiųjų optimizavimo uždavinių sprendimas, *Liet. Matem. Rink.*, 28 (1) (1988), 23–32 (rusų k.).

[2] L. S. Pontryagin et.al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York, 1962.

[3] N. Janušauskaitė, L. Zabelo, Kombinatorinių uždavinių sprendimas dinaminio programavimo metodu, *Vestnik Beloruss Gos. Univ. ser. I. Fiz. Mat. Mech.* 1990, Nr. 2, p. 38–41 (rusų k.).

[4] F. Vasiljev, *Ekstremaliųjų uždavinių sprendimo metodai*, Maskva, 1984 (rusų k.).

The combinatorial problem in optimal control for the discrete systems

N. Janušauskaitė

The calculation algorithm to find optimal strategy the combinatorial problem in optimal control for the discrete systems is composed.