LMD konf. darbai, 281–286
1997, Vilnius

Draudimo nuostolių visumos skirstinių aproksimavimas

V. Karpickaitė (KTU)

Rizikos teorijos vienas pagrindinių uždavinių yra draudimo polisų portfelio išmokų (nuostolių visumos) skirstinių suradimas.

Matematinėje rizikos teorijoje yra sprendžiamos dvi problemos: išmokų visumos skirstinio parinkimas ir skaitinis įvertis pagal aproksimavimo reikšmes. Priklausomai nuo draudimo matematinio modelio, nuostolių visumos skirstinių aproksimavimui siūloma taikyti ortogonaliuosius polinomus, bei Edžvorto, Esšerio aproksimacijas.

Nagrinėjant kolektyvinės rizikos matematinį modelį trumpalaikiam periodui, kuris aprašomas atsitiktinio skaičiaus N atsitiktinių dydžių suma

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N;$$

čia $X_1, X_2, \ldots$ yra identiškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, o $N, X_1, X_2, \ldots$ – nepriklausomi, jos skirstinių aproksimavimui, tikslinga panaudoti ortogonaliuosius polinomus.

Ortogonalieji polinomai $\pi_k(x)$ su svorio funkcija $w(x)$ [1], tenkina sąlygas

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(x)\pi_k(x)w(x)\,dx = 0, \quad i \neq k, \\ C_k = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_k^2 w(x)\,dx, \quad k \in N.\end{gathered} \tag{1}$$

Tada tankio funkcija gali būti išreiškiama eilute

$$p(x) = A_0\pi_0(x)w(x) + A_1\pi_1(x)w(x) + \cdots$$

arba aproksimuojama jos nariais

$$p(x) \approx A_0\pi_0(x)w(x) + \cdots + A_n\pi_n(x)w(x), \tag{2}$$

čia

$$A_k = \frac{1}{C_k}\int_{-\infty}^{\infty} \pi_k(x)p(x)\,dx, \quad k \in N. \tag{3}$$

Mūsų nagrinėjamu atveju, standartizuoto atsitiktinio dydžio

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \tag{4}$$

skirstinio aproksimavimui taikysime Ermito polinomus, t.y.

$$\pi_k(x) = H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x),$$

čia $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – normaliojo skirstinio tankio funkcija, o patys polinomai yra apskaičiuojami, panaudojant rekurentinę formulę

$$H_{k+1}(x) = xH_k(x) - kH_{k-1}(x).$$

Svorio funkcija tada yra $w(x) = \varphi(x)$.

Iš išraiškos (1) akivaizdu, kad $C_k = k!$, o iš (3) gauname, kad $A_k = \frac{\mu_k}{k!\sigma^k}$, čia $\sigma = \sqrt{\mu_2}$, μ_k – semiinvariantai, gaunami diferencijuojant momentus generuojančią funkciją $M_S(t)$, t.y.

$$\mu_k = \frac{d^k}{dt^k} \ln M_S(t)\Big|_{t=0}. \tag{5}$$

Sudėtinio Puasono skirstinio atveju

$$M_S(t) = \exp\big(\lambda(M_X(t) - 1)\big), \tag{6}$$

sudėtinio neigiamo binominio skirstinio atveju

$$M_S(t) = \left[\frac{p}{1 - qM_X(t)}\right]^r. \tag{7}$$

Suradus semiinvariantus iš išraiškų (5), (6) ir (7), ir įstačius į (2), gausime atsitiktinio dydžio (4), tankio funkcijų išraiškas:

$$\begin{aligned} p_1(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\bigg(1 &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{m_3}{3!\sigma^3}H_3(z) + \frac{1}{\lambda}\frac{m_4}{4!\sigma^4}H_4(z) \\ &+ \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\frac{m_5}{5!\sigma^5}H_5(z) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\lambda^{n-2}}}\frac{m_n}{n!\sigma^n}H_n(z)\bigg); \end{aligned} \tag{8}$$

čia $m_n = M_X^{(n)}(0)$ – atsitiktinio dydžio X pradiniai momentai,

$$\begin{aligned} p_2(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\bigg(1 &+ \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\mu_3^*}{3!\sigma^{*3}}H_3(z) + \frac{1}{r}\frac{\mu_4^*}{4!\sigma^{*4}}H_4(z) \\ &+ \frac{1}{r\sqrt{r}}\frac{\mu_5^*}{5!\sigma^{*5}}H_5(z) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{r^{n-2}}}\frac{\mu_n^*}{n!\sigma^{*n}}H_n(z)\bigg), \end{aligned} \tag{9}$$

čia

$$\mu_n^* = \frac{d^n}{dt^n}\big(\ln p - \ln\big(1 - qM_X(t)\big)\big)\big|_{t=0}, \qquad \sigma^* = \sqrt{\mu_2^*}.$$

Toliau nagrinėsime Edžvorto aproksimaciją. Tuo tikslu funkciją $\ln M_S(t)$ skleisime Teiloro eilute, t.y.

$$\ln M_S(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \cdots + \mu_n t^n + \cdots, \tag{10}$$

čia μ_n, aprašyta išraiška (5).

Kadangi nagrinėjamas atsitiktinis dydis Z (4), tai $\mu_0 = \mu_1 = 0$; $\mu_2 = \frac{1}{2}$, o iš (10) seka

$$M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\exp\big(\mu_3 t^3 + \mu_4 t^4 + \cdots + \mu_n t^n + \cdots\big).$$

Dar kartą panaudojus funkcijos skleidimą Teiloro eilute, tik šį kartą funkcijos $\exp(\mu_3 t^3 + \mu_4 t^4 + \cdots + \mu_n t^n + \cdots)$, gausime

$$\begin{aligned} M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\bigg(&1 + \mu_3 t^3 + \mu_4 t^4 + \cdots + \mu_n t^n \\ &+ \frac{(\mu_3 t^3 + \mu_4 t^4 + \cdots + \mu_n t^n + \cdots)^2}{2!} + \cdots \\ &+ \frac{(\mu_3 t^3 + \mu_4 t^4 + \cdots + \mu_n t^n + \cdots)^n}{n!} + \cdots\bigg). \end{aligned} \tag{11}$$

Kadangi

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\varphi(x)\,dx,$$

$$t\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\varphi'(x)\,dx,$$

$$t^2\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\varphi''(x)\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t^n\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\varphi^{(n)}(x)\,dx,$$

išraišką (11) pakeisime tankio funkcijos išraiška

$$\begin{aligned} p(z) \approx \varphi(z) - \mu_3\varphi^{(3)}(z) + \mu_4\varphi^{(4)}(z) - \mu_5\varphi^{(5)}(z) + \left(\mu_6 + \frac{\mu_3^2}{2!}\right)\varphi^{(6)}(z) \\ - (\mu_7 + \mu_3\mu_4)\varphi^{(7)}(z) + \left(\mu_8 + \frac{\mu_4^2}{2!} + \mu_3\mu_5\right)\varphi^{(8)}(z). \end{aligned} \tag{12}$$

Panaudojus Ermito polinomų apibrėžimą, išraišką (12) parašysime taip

$$p(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Biggl(1 + \mu_3 H_3(z) + \mu_4 H_4(z) + \mu_5 H_5(z) + \left(\mu_6 + \frac{\mu_3^2}{2!}\right) H_6(z) + (\mu_7 + \mu_3\mu_4) H_7(z) + \left(\mu_8 + \frac{\mu_4^2}{2!} + \mu_3\mu_5\right) H_8(z) \Biggr). \tag{13}$$

Sudėtinio Puasono skirstinio atveju, gausime

$$p(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Biggl(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{m_3}{3!\sigma^3} H_3(z) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{m_4}{4!\sigma^4} H_4(z) + \frac{m_3^2}{2(3!)^2\sigma^8} H_6(z) \right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}} \left(\frac{m_5}{5!\sigma^5} H_5(z) + \frac{m_3 m_4}{3!4!\sigma^7} H_7(z) \right) + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{m_6}{6!\sigma^6} H_6(z) + \frac{m_4^2}{2(4!)^2\sigma^8} H_8(z) + \frac{m_3 m_5}{3!5!\sigma^8} H_8(z) \right) \Biggr). \tag{14}$$

Nagrinėsime Esšerio aproksimaciją.
Pasiskirstymo funkcija

$$\overline{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dF(y)/M(h) \tag{15}$$

yra vadinama funkcijos F Esšerio transformacija su parametru h.

Esšerio metodo esmė yra parinkti parametrą h taip, kad $M'(h)/M(h) = x$.

Išdiferencijavus išraišką (15), gausime tankio funkciją

$$\bar{p}(x) = \frac{e^{hx} p(x)}{M(h)},$$

iš čia

$$p(x) = e^{-hx} M(h) \bar{p}(x), \tag{16}$$

čia $\bar{p}(x)$ – Edžvorto aproksimacijos išraiška (12).

Suintegravus (16), gausime Esšerio aproksimacijos išraišką:

$$
\begin{aligned}
1 - F(x) &= M(h) \int_x^{\infty} e^{-hy} \bar{p}(y)\, dy \\
&\approx M(h) e^{-hx} \Bigg(E_0(u) - \mu_3 E_3(u) + \mu_4 E_4(u) - \mu_5 E_5(u) \\
&\quad + \left(\mu_6 + \frac{\mu_3^2}{2} \right) E_6(u) - (\mu_7 + \mu_3 \mu_4) E_7(u) \\
&\quad + \left(\mu_8 + \frac{\mu_4^2}{2} + \mu_3 \mu_5 \right) E_8(u) \Bigg),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

čia $u = h\sqrt{\mathrm{Var}(S)}$, $E_k(u) = \int_0^{\infty} e^{-uz} \varphi^{(k)}(z)\, dz$ – Esšerio funkcijos, apskaičiuojamos pagal rekurentinę formulę

$$
E_k(u) = -\varphi^{(k-1)}(0) + u E_{k-1}(u),
$$

kai $E_0(u) = e^{u^2/2}(1 - \Phi(u))$.

Sudėtinio Puasono skirstinio atveju, kai momentus generuojanti funkcija $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$, $\lambda M'_X(h) = x$. Esšerio aproksimaciją (17) užrašysime taip

$$
\begin{aligned}
1 - F(x) &\approx e^{\lambda(M_X(h)-1)-hx} \Bigg(E_0(u) - \frac{M_X^{(3)}(h)}{\sqrt{\lambda} 3! (M_X^{(2)}(h))^{3/2}} \cdot E_3(u) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M_X^{(4)}(h)}{4!(M_X^{(2)}(h))^2} E_4(u) + \frac{(M_X^{(3)}(h))^2}{2(3!)^2 (M_X^{(2)}(h))^3} E_6(u) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}} \left(\frac{M_X^{(5)}(h)}{5!(M_X^{(2)}(h))^{5/2}} E_5(u) + \frac{M_X^{(3)}(h) M_X^{(4)}(h)}{3!4!(M_X^{(2)}(h))^{7/2}} E_7(u) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} \Bigg(\frac{M_X^{(6)}(h)}{6!(M_X^{(2)}(h))^3} E_6(u) + \frac{(M_X^{(4)}(h))^2}{2(4!)^2 (M_X^{(2)}(h))^4} E_8(u) \\
&\quad + \frac{M_X^{(3)}(h) M_X^{(5)}(h)}{3!5!(M_X^{(2)}(h))^4} E_8(u) \Bigg) \Bigg).
\end{aligned}
$$

Buvo atlikti skaičiavimai sudėtinių Puasono ir neigiamo binominio skirstinių atvejais, kai nuostolių (išmokų) sumų skirstiniais buvo parinkti eksponentinis, lognormalusis ir Pareto, kurie dažniausiai sutinkami draudime.

Išvados.

1. Gramo–Šarlje aproksimacija (8) duoda gerus rezultatus sudėtinio Puasono skirstinio atveju, kai $\lambda \geqslant 10$.

2. Edžvorto aproksimacija duoda gerus rezultatus apie vidurines intervalo reikšmes, o intervalo galuose rezultatai blogi (ypatingai lognormaliojo skirstinio atveju).

LITERATŪRA

[1] U. H. Gerber, *An Introduction to Matematical Risk Theory*, Monograph No. 8, Wharton School University of Pennsylvania, 1979.

Approximation methods for distributions of aggregate insurance losses

V. Karpickaitė

The distribution of aggregate claims of a portfolio has been a central topic in risk theory. The discussion has focussed on two problems: the choice of the distribution and its numerical evalution by means of an approximation. The paper describes the method of approximation by means of orthogonal polynomiales, the Edgeworth and the Esscher methods.