LMD konf. darbai, 293–297
1997, Vilnius

Beveik nestabilių AR(p) modelių ypatumai

N. Kligienė (MII), V. Kligys (LTEI)

Nagrinėjame $\{X_t,\ t \in Z\}$ diskrečiojo laiko atsitiktinį procesą, aprašomą baigtinės eilės AR(p) modeliu

$$\alpha(B)X_t = \varepsilon_t, \qquad t \in Z, \tag{1}$$

kur B yra poslinkio atgal operatorius $BX_t = X_{t-1}$, seka $\{\varepsilon_t,\ t \in Z\}$ yra nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių dydžių seka su vidurkiu $E\{\varepsilon_t\} = 0$ ir dispersija $E\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2$.

Polinomas $\alpha(z) = 1 - a_1 z - \cdots - a_p z^p$ neturi šaknų vienetinio apskritimo viduje, būtent:

$$\alpha(z) \neq 0, \quad \text{jei } |z| \leqslant 1. \tag{2}$$

Proceso $\{X_t\}$ stacionarumo sritis $\Theta \subset R^p$ apibrėžiama kaip parametrų $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ aibė, kurioje (2) sąlyga patenkinama. Tokie stacionarieji procesai visapusiškai išnagrinėti literatūroje, pavyzdžiui, Box ir Jenkins [3]. Mes nagrinėjame atvejį, kai $\mathbf{a}$ artėja prie stacionarumo srities ribos arba, kai $\alpha(z)$ šaknys tampa artimos vienetui. Toks procesas vadinamas beveik nestacionariu, o modelis beveik nestabiliu. Jo charakteringasis polinomas yra $\alpha_n(z)$ su koeficientais $(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn})$ ir kiekvienam fiksuotam n turime nagrinėti procesų $\{X_{tn}\}$ stacionariąsias sekas, aprašomas:

$$\alpha_n(B)X_{tn} = \varepsilon_t, \quad t \in Z,\ n = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Tegu $R_X(\tau) = E\{X_t, X_{t+\tau}\}$, $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ yra proceso $\{X_t\}$, aprašomo (1) lygtimi, kovariacinė funkcija, tokia, kad egzistuoja jo spektrinio tankio funkcija $h_X(\omega)$, $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$. Pažymėkime polinomo $\tilde{\alpha}(z) = z^p \alpha(z^{-1}) = z^p - a_1 z^{p-1} - \cdots - a_p$ šaknis z_j ir pastebėkime, kad visos $|z_j| < 1$, $j = 1, 2, \ldots, p$, dėl (2) sąlygos. Polinomo $\tilde{\alpha}_n(z) = z^p \alpha_n(z^{-1})$ šaknis žymėkime z_{jn}.

Prielaida. $\alpha_n(z)$ gali turėti vieną iš trijų išraiškų:

$$\alpha_n(B) = \begin{cases} \alpha_n^{(1)}(B) = (1 - z_{1n}B)\alpha^*(B), \\ \alpha_n^{(2)}(B) = (1 - z_{2n}B)\alpha^*(B), \\ \alpha_n^{(3)}(B) = (1 - z_{3n})(1 - z_{4n})\alpha^{**}(B), \end{cases} \tag{4}$$

kur

$$z_{1n} = e^{-c_1/n}, \qquad z_{2n} = -e^{-c_2/n}, \tag{5}$$

$$z_{3n} = e^{-c_3/n + i\omega_0}, \qquad z_{4n} = e^{-c_3/n - i\omega_0}. \tag{6}$$

Čia $\alpha^*(z)$ ir $\alpha^{**}(z)$ yra $(p-1)$ ir $(p-2)$ eilės polinomai, neturintys šaknų arti vienetinio apskritimo ir jų šaknys nepriklauso nuo n.

Įveskime šaknų z_{jn} artumo vienetiniam apskritimui matą

$$\delta_{jn} ž 1 - |z_{jn}|, \quad j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Jei prielaida teisinga, (3) lygtis kitaip gali būti užrašyta

$$X_{tn} = \frac{1}{(1 - z_{jn}B)\alpha^*(B)}\varepsilon_t = \frac{1}{1 - z_{jn}B}Y_t, \quad j = 1, 2 \tag{8}$$

$$X_{tn} = \frac{1}{(1 - (z_{3n} - z_{4n})B + |z_{3n}|^2 B)}Y_t, \tag{9}$$

kur kiekvienam fiksuotam n, abu procesai $\{X_{tn}\}$ ir $\{Y_t\}$ yra stacionarieji, su kovariacinėmis funcijomis $R_X(\tau; \delta_{jn})$, $R_Y(\tau)$ ir spektrinio tankio funkcijomis $h_X(\omega; \delta_{jn})$, $h_Y(\omega)$. Čia $h_X(\omega; \delta_{jn})$ ir $R_X(\tau; \delta_{jn})$ yra funkcijos atitinkančios $\alpha_n^{(j)}(B)$, $j = 1, 2, 3$.

Gautos funkcijų $h_X(\omega; \delta_{jn})$, $R_X(\tau; \delta_{jn})$ $n \in (1, 2, 3, \ldots, N)$, $j = 1, 2, 3$ išraiškos per $h_Y(\omega)$ ir $R_Y(\tau)$ bei δ_{jn}.

TEOREMA. *Jei prielaida teisinga, didėjant n, $\delta_{jn} \to 0$ ir $h_X(\omega; \delta_{jn})$ artėja į funkcijas, turinčias ypatingų taškų:*

$$h_X(\omega; \delta_{1n}) \longrightarrow \frac{1}{4\sin^2\frac{\omega}{2}}h_Y(\omega), \quad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi, \tag{10}$$

$$h_X(\omega; \delta_{2n}) \longrightarrow \frac{1}{4\cos^2\frac{\omega}{2}}h_Y(\omega), \quad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi, \tag{11}$$

$$h_X(\omega; \delta_{3n}) \longrightarrow \frac{1}{4(\cos\omega - \cos\omega_0)^2}h_Y(\omega), \quad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi. \tag{12}$$

Pastebėkime, kad $\{X_{tn}\}$ proceso ribinis procesas, kai $n \to \infty$ ir $\delta_{jn} \to 0$, turi būti aprašomas ne viena skirtumine lygtimi, o trimis skirtingomis skirtuminėmis lygtimis:

$$\alpha^*(B)\Delta_0 X_t = \varepsilon_t, \quad \text{kai } \delta_{1n} \to 0, \tag{13}$$

$$\alpha^*(B)\Delta_\pi X_t = \varepsilon_t, \quad \text{kai } \delta_{2n} \to 0, \tag{14}$$

$$\alpha^{**}(B)\Delta^2_{\pm\omega_0} X_t = \varepsilon_t, \quad \text{kai } \delta_{3n} \to 0, \tag{15}$$

kur $\Delta_\bullet = 1 - B$ ir $\Delta_\bullet$ apatinis indeksas nurodo vienetinio poliaus vietą.

Parodoma, kad δ_{1n} atveju galima gauti δ_{1n} įvertį iš beveik nestacionaraus proceso $\{X_{tn}\}$ stebinių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir statistikos $n(\hat{\delta}_{1n} - \delta_{1n})$ asimptotinį pasiskirstymą, kai $n \to \infty$ [7].

Detaliau panagrinėkime kompleksinių šaknų atvejį paprasčiausiam beveik nestabiliam AR(2) modeliui

$$X_{tn} = a_{1n}X_{t-1,n} + a_{2n}X_{t-2,n} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \tag{16}$$

kur $X_0 = X_{-1} = 0$; $a_{1n} = 2e^{-c/n}\cos\omega_0$, $a_{2n} = -e^{-2c/n}$, $t = 1, 2, \ldots, n$. Čia ir toliau paprastumo dėlei žymėsime $c \equiv c_3$ (žiūr. (6) formulę).

Ahtola ir Tiao [2] yra parodę, kad paprasto AR(2) modelio (16) mažiausių kvadratų įverčių asimptotiniai pasiskirstymai yra tokie pat, kaip ir sudėtingesnio (9) modelio įverčių pasiskirstymai. Todėl užtenka nagrinėti tik (16) modelį.

Pirmiausia pastebėkime, kad (16) modelį galime užrašyti kitu būdu:

$$X_{tn} = \sum_{j=1}^{t} \psi_{j-1,n}\varepsilon_{t-j-1}, \tag{17}$$

Kur $\psi_{0n} = 1$; $\psi_{1n} = 2e^{-c/n}\cos\omega_0$, o kitiems (17) dėstinio koeficientams teisinga lygybė:

$$\psi_{jn} = a_{1n}\psi_{j-1,n} + a_{2n}\psi_{j-2,n}, \quad j \geqslant 2. \tag{18}$$

Panaudoję koeficientų a_{1n}, a_{2n} išraiškas per z_{3n}, z_{4n} ir atlikę algebrinius veiksmus gauname

$$\psi_{k,n} = \frac{e^{-ck/n}\sin(k+1)\omega_0}{\sin\omega_0}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Pažymėję $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots X_{n-1})'$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n)'$ ir $(n-1)\times n$ matricą $\boldsymbol{T}$,

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{1n} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{n-3,n} & \psi_{n-4,n} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \psi_{n-2,n} & \psi_{n-3,n} & \cdots & \psi_{1n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

(17) formulę perrašome matriciniu būdu:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}\varepsilon \tag{21}$$

Nesunku įrodyti, kad (16) modelio mažiausiųjų kvadratų įverčiams teisingas skleidinys

$$n\begin{bmatrix} \hat{a}_{1n} - a_{1n} \\ \hat{a}_{2n} - a_{2n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-d_n^2}\begin{bmatrix} 1 & -d_n \\ -d_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t\varepsilon_t & \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}^2 \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{t-2}\varepsilon_t & \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_p(1) \\ o_p(1) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

kur

$$d_n = \frac{a_{1n}}{1-a_{2n}} = \frac{\cos\omega_0}{\operatorname{ch} c/n}. \tag{23}$$

Remiantis (19)–(21) išraiškomis, (22) reiškinio sumas galime pakeisti atitinkamų matricų ir vektorių sandaugomis:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}\varepsilon_t &= \varepsilon' A\varepsilon,\\ \sum_{t=1}^{n} x_{t-2}\varepsilon_t &= \varepsilon' C\varepsilon,\\ \sum_{t=1}^{n} x_{t-1}^2\varepsilon_t &= \varepsilon' T'T\varepsilon,\end{aligned} \tag{24}$$

kur A ir C yra $n\times n$ Teoplico matricos sudarytos iš koeficientų ψ_{jn}, nulių ir vienetų:

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \psi_{1n} & \cdots & \psi_{n-3,n} & \psi_{n-2,n}\\ 1 & 0 & \cdot & \cdots & \psi_{n-4,n} & \psi_{n-3,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ \psi_{n-4,n} & \psi_{n-5,n} & \psi_{n-6,n} & \cdots & 1 & \psi_{1n}\\ \psi_{n-3,n} & \psi_{n-4,n} & \psi_{n-5,n} & \cdots & 0 & 1\\ \psi_{n-2,n} & \psi_{n-3,n} & \psi_{n-4,n} & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$C=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \psi_{1n} & \cdots & \psi_{n-4,n} & \psi_{n-3,n}\\ 1 & 0 & \cdot & \cdots & \psi_{n-5,n} & \psi_{n-4,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ \psi_{n-5,n} & \psi_{n-6,n} & \psi_{n-7,n} & \cdots & 1 & \psi_{1n}\\ \psi_{n-4,n} & \psi_{n-5,n} & \psi_{n-6,n} & \cdots & 0 & 1\\ \psi_{n-3,n} & \psi_{n-4,n} & \psi_{n-5,n} & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Tada (22) įgauna tokį pavidalą

$$n\left(\hat a_{1n}-a_{1n}\right)=\frac{1}{1-d_n^2}\frac{\frac{1}{n}\varepsilon'(A-d_nC)\varepsilon}{\frac{1}{n^2}\varepsilon'T'T\varepsilon}+o_p(1), \tag{27}$$

$$n\left(\hat a_{2n}-a_{2n}\right)=\frac{1}{1-d_n^2}\frac{\frac{1}{n}\varepsilon'(C-d_nA)\varepsilon}{\frac{1}{n^2}\varepsilon'T'T\varepsilon}+o_p(1), \tag{28}$$

Jeigu $c=0$, $d_n\equiv d=\cos\omega_0$, matricos A ir C tampa ciklinėmis ir įmanoma užrašyti jų nuosavas reikšmes ir nuosavus vektorius išreikštinėmis funkcijomis. Tai leidžia gauti statistikų asimptotinius pasiskirstymus [1], jei kompleksinės šaknys yra ant paties vienetinio apskritimo ($c=0$). Šiuo atveju, jei $c\neq 0$, matricos A ir C nėra ciklinės, o jų kiekviena diagonalė ir subdiagonalė turi skirtingą daugiklį $e^{-ck/n}$, $k=1,2,\ldots,n$ ir todėl (27)–(28) statistikų asimptotinio pasiskirstymo neįmanoma taip paprastai gauti.

Matome, kad nestabilaus modelio su vienetinėmis šaknimis charakteristikos yra netgi paprastesnės negu tiriamojo beveik nestabilaus modelio, tik nestabilaus modelio spektrinio tankio funkcija, kaip matyti iš teoremos, turi ypatumų ir neegzistuoja atskiruose taškuose, o jo koreliacinė funkcija $R_X(\tau;\delta_{jn})$ vis lėčiau gęsta, kol visai išsigimsta charakteringoms šaknims priartėjus prie vienetinio apskritimo. Tai gerai matyti iš išraiškos:

$$R_X(\tau;\alpha_{1n}) = \frac{1}{1-a_{1n}^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{1n}^{|k|} R_Y(\tau-k), \quad \text{kur } a_{1n} \to 1. \tag{29}$$

LITERATŪRA

[1] J. Ahtola and G. C. Tiao, Distribution of least squares estimators of autoregressive parameters for a process with complex roots on the unit circle, *J. Time Series Anal.*, **8** (1987), 1–14.

[2] J. Ahtola and G. C. Tiao, A note on asympthotic inference in autoregressive models with roots on the unit circle, *J. Time Series Anal.*, **8** (1987), 15–19.

[3] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-day, San Francisko, 1970.

[4] N. H. Chan, Inference for near-integrated time series with infinite variance, *JASA*, **85** (412) (1990), 1009–1074.

[5] D. A. Dickey and W. A. Fuller, Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *J. Am. Stat. Assoc.*, **74** (1979), 427–431.

[6] D. A. Dickey and W. A. Fuller, Likehood ratio statistics for autoregresive time series with a unit root, *Econometrica*, **49** (1981), 1057–1072.

[7] P. C. B. Phillips, Towards a unified asympthotic theory for autoregression, *Biometrika*, **74** (1987), 535–547.

[8] M. B. Priestley, *Spectral Analysis and Time series*, vol.1, Academic Press, Inc. (130p.), London–Tokyo, 1981.

[9] S. F. Yap and G. S. Reinsel, Results on estimation and testing for a unit root in the nonstationary autoregressive moving-average model, *J. Time Series Anal.*, **16** (1995), 339–353.

[10] J. S. White, The limiting distribution of serrial correlation coefficient in the explosive case, *Ann. Math. Stat.*, **29** (1958), 1188–1197.

[11] T. Van der Meer, G. Pap and M. Van Zuijlen, Asymptotic inference for nearly unstable AR(p) process, Technical Report 9413, Catholic University Nijmegen, The Neterlands, 1993,

The properties of nearly unstable ARp models

N. Kligienė (MII), V. Kligys (LTEI)

Second order properties of nearly nonstationary autoregressive (AR) processes are investigated in the cases when an autoregressive polynomial equation has: (i) a real root close to 1; (ii) a real root close to -1; (iii) a pair of complex roots close to the unit circle.

The effect of the closeness to the unit circle of AR poles on its covariance and spectral density functions is considered. The obtained results demonstrate three specific ways of degeneracy of these functions, as the roots tend to 1 in modulus. The case of complex roots is investigated in details.