LMD konf. darbai, 309–312
1997, Vilnius

Interpoliacinių dvimačių trečiosios ir penktosios eilės splainų apskaičiavimas

K. Plukas (KTU)

Uždavinio formulavimas. Tarkime, srityje D turime tinklelį

$$D_h = \{x_j, y_i\colon\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b;\ \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d\}$$

ir funkcijos $z = f(x, y)$ reikšmes tinklelio taškuose.

Norime apskaičiuoti interpoliacinį dvimatį n-osios ($n = 2k+1$ – nelyginis natūrinis skaičius) eilės splainą $g = g(x, y)$, tenkinantį šias sąlygas:

1) $g(x, y) \in C^{2k}(D)$;

2) kiekviename langelyje (j, i): $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$, $y_i \leqslant y \leqslant y_{i+1}$,

$$g(x, y) = \sum_{t,l=0}^{n} a_{tl}^{ji}(x_j - x)^t (y_i - y)^l;$$

3) $g(x_j, y_i) = f(x_j, y_i) = z_{ji}$, $j = \overline{0, N}$, $i = \overline{0, M}$.

Kad šis splainas būtų vienareikšmiškai apibrėžtas, turime pareikalauti, kad $g(x, y)$ tenkintų kraštines sąlygas, kurios yra analogiškos vienmačio kubinio splaino kraštinėms sąlygoms [1].

Vienas iš kraštinių sąlygų variantų, vienareikšmiškai nusakančių dvimatį 5-osios eilės interpoliacinį splainą, pavyzdžiui, gali būti funkcijos $z = f(x, y)$ dalinių išvestinių reikšmės kraštiniuose srities taškuose: $\partial^4 f/\partial y^2 \partial x^2$, $\partial^3 f/\partial y^2 \partial x$, $\partial^3 f/\partial y \partial x^2$, $\partial^2 f/\partial y \partial x$ taškuose (x_0, y_0), (x_N, y_0), (x_0, y_M), (x_N, y_M), $\partial f/\partial x$, $\partial^2 f/\partial x^2$ taškuose $x = x_0$, $x = x_N$ ir $y = y_i$, $i = \overline{0, M}$, o taip pat $\partial f/\partial y$, $\partial^2 f/\partial y^2$ reikšmės taškuose $y = y_0$, $y = y_M$ ir $x = x_j$, $j = \overline{0, N}$.

Bendras uždavinio sprendimo metodas. Suformuluotą uždavinį patogu spręsti, kai dvimatis n-osios eilės splainas užrašomas tiesine B splainų kombinacija [1]

$$g(x, y) = \sum_{i=-n}^{M-1} \sum_{j=-n}^{N-1} b_{ij} B_j(x) \widetilde{B}_i(y), \tag{1}$$

čia $B_j(x)$ – n-osios eilės B splainas, nelygus nuliui intervale $[x_j, x_{j+n+1}]$ ir kurį nusako tinklelis $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$; $\widetilde{B}_i(y)$ – analogiškas B splainas, tinklelio $y_0 < y_1 < \cdots < y_M$ atžvilgiu, o b_{ij} – koeficientai, kuriuos reikia apskaičiuoti taip, kad galiotų interpoliavimo sąlyga

$$g(x_j, y_i) = z_{ji}, \qquad j = \overline{0, N}, \quad i = \overline{0, M}. \tag{2}$$

Šio uždavinio sprendimo metodas bikubiniams splainams yra pateiktas literatūroje [1], tačiau jis gali būti taikomas ir aukštesnės eilės interpoliacinių dvimačių splainų apskaičiavimui.

Čia pateiksime literatūroje [1] pateikto metodo apibendrinimą ir panagrinėsime praktinius jo realizavimo aspektus.

Imkime splaino funkcijų sistemą

$$\nu_j(y) = \sum_{i=-n}^{M-1} b_{ij}\widetilde{B}_i(y), \quad j = \overline{-n, N-1}. \tag{3}$$

Tada (1) formulė gali būti perrašyta taip

$$g(x, y) = \sum_{j=-n}^{N-1} \nu_j(y) B_j(x). \tag{4}$$

Remdamiesi (3) ir (4) formulėmis, aprašysime n-osios eilės dvimačio interpoliacinio splaino apskaičiavimo metodą, kurį sudaro du žingsniai.

Pirmasis žingsnis. Apskaičiuosime n-osios eilės vienmačius interpoliacinius splainus pagal visas matricos $z = [z_{ij}]$, $i = \overline{0, M}$, $j = \overline{0, N}$ eilutes, o taip pat pagal eilutes, nusakančias kraštines sąlygas. Šio žingsnio rezultatai yra koeficientai ν_{ij}, $i = \overline{-k, M+k}$, $j = \overline{-n, N-1}$, čia $n = 2k+1$.

Antrasis žingsnis. Naudodami koeficientus ν_{ij}, $i = \overline{0, M}$, $j = \overline{-n, N-1}$, kaip funkcijos reikšmes, o likusius koeficientus ν_{ij}, $i = \overline{-k, -1}$ ir $i = \overline{M+1, M+k}$, $j = \overline{-n, N-1}$, kaip kraštines sąlygas, apskaičiuosime vienmačius interpoliacinius n-osios eilės splainus pagal visus stulpelius j, $j = \overline{-n, N-1}$. Šiuos splainus nusakantys koeficientai b_{ij}, $i = \overline{-n, M-1}$, $j = \overline{-n, N-1}$, ir yra ieškomieji koeficientai.

Kaip matyti iš pateikto metodo, pagrindinis dvimačių splainų apskaičiavimo įrankis yra vienmačių interpoliacinių n-osios eilės splainų apskaičiavimo procedūra.

Vienmatis n-osios eilės defekto 1 splainas $g(x)$ taip pat, kaip ir dvimatis splainas, gali būti užrašytas tiesine B splainų kombinacija

$$g(x) = \sum_{i=-n}^{N-1} b_i B_n^i(x), \tag{5}$$

čia $B_n^i(x)$ – n-osios eilės B splainai, kuriuos nusako išplėstas tinklelis

$$\Delta\colon\ x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} < \cdots < x_{N+n}.$$

Tarkime, kad duota funkcijos $y = f(x)$ reikšmių lentelė (x_i, y_i), $i = \overline{0, N}$. Tada (5) formulės koeficientus b_i apskaičiuosime taip, kad galiotų interpoliavimo sąlyga

$$g(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, N}. \tag{6}$$

Kad interpoliavimo uždavinys būtų vienareikšmiškai apibrėžtas, turime pareikalauti, kad $g(x)$ tenkintų $(n-1)$ kraštinę sąlygą [1]. Pavyzdžiui, kubinio splaino atveju vienas iš galimų kraštinių sąlygų variantų yra: $g'(x_0) = f'(x_0)$ ir $g'(x_N) = f'(x_N)$. Kadangi $B_n^i(x)$ nelygus nuliui tik intervale $[x_i, x_{i+n+1}]$, tai (6) interpoliavimo sąlyga kartu su kraštinių sąlygų lygtimis sudarys tiesinių lygčių sistemą, kurios matrica gali būti perskaičiuota į n pločio juostinę matricą.

Matricos elementai yra B splainų ir jų išvestinių reikšmės taškuose x_i, t.y norint suformuoti minėtą lygčių sistemą reikia mokėti apskaičiuoti n-osios eilės B splainų r-osios ($r \geqslant 0$) eilės išvestinių reikšmes mazginiuose tinklelio taškuose.

Šias reikšmes, kai $x \in [x_i, x_{i+1}]$, nusako formulės [1]

$$B_n^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n} - x_i} B_{n-1}^i(x) + \frac{x_{i+n+1} - x}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} B_{n-1}^{i+1}(x), \quad n \geqslant 1, \tag{7}$$

$$B_0^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}), \end{cases} \tag{8}$$

$$g^{(r)}(x) = n(n-1)\cdots(n-r+1) \sum_{k=i-n+r}^{i} b_k^{(r)} B_{n-r}^k(x), \tag{9}$$

čia $b_k^{(0)} = b_k$, $k = \overline{i-n, i}$,

$$b_k^{(l)} = \frac{b_k^{(l-1)} - b_{k-1}^{(l-1)}}{x_{k+n+1-l} - x_k}, \quad l = \overline{1, r}, \ k = \overline{i-n+l, i}.$$

Nesunku pastebėti, kad (7) ir (8) formulės įgalina apskaičiuoti $B_n^k(x_i)$, o (9) formulė, kai $b_i = 0$, $i = \overline{-n, N-1}$ ir $i \neq k$, o $b_k = 1$, leidžia apskaičiuoti $B_n^k(x)$ r-osios eilės išvestinę taške x_i.

Tiesinių lygčių sistemos su juostine matrica sprendimas. Kai $n = 3$, apskaičiuojant (5) formulės koeficientus, reikia spręsti tridiagonaliąją lygčių sistemą. Tokias sistemas patogiausia spręsti praleidimo metodu, kuris aprašytas literatūroje [2].

Kubiniams splainams su periodinėmis kraštinėmis sąlygomis modifikuotas praleidimo metodas yra aprašytas literatūroje [3].

Apskaičiuojant vienmačius penktosios eilės splainus tenka spręsti penkiadiagonaliąją tiesinių lygčių sistemą, kuri gali būti užrašyta taip

$$\begin{aligned} &a_i x_{i-2} + b_i x_{i-1} - c_i x_i + d_i x_{i+1} + g_i x_{i+2} = h_i, \quad i = \overline{1, n}; \\ &a_1 = a_2 = b_1 = 0, \qquad g_{n-1} = g_n = d_n = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Remdamiesi tridiagonaliosios sistemos praleidimo metodo formulių išvedimo metodika, gausime tokias darbo formules šiai lygčių sistemai spręsti.

Tiesioginis etapas

$$s_{i+1} = \frac{a_i s_{i-1} e_i + b_i e_i + d_i}{\nu},$$
$$e_{i+1} = \frac{g_i}{\nu},$$
$$f_{i+1} = \frac{a_i s_{i-1} f_i + a_i f_{i-1} + b_i f_i - h_i}{\nu}, \quad i = \overline{1, n},$$

čia

$$\nu = c_i - a_i s_{i-1} s_i - a_i e_{i-1} - b_i s_i,$$
$$s_0 = s_1 = e_0 = e_1 = f_0 = f_1 = 0.$$

Atvirkštinis etapas

$$x_i = s_{i+1} x_{i+1} + e_{i+1} x_{i+2} + f_{i+1}, \quad i = \overline{n, 1}$$

čia $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$.

Jei tinklelio Δ žingsnis yra pastovus, tai (10) sistema turi dominuojančią pagrindinę įstrižainę, ir ši lygčių sistema yra gerai sąlygota.

Praktinė realizacija. Autorius yra sudaręs interpoliacinių dvimačių trečiosios ir penktosios eilės splainų apskaičiavimo paskalines procedūras. Skaitytojai, norėdami gauti šias procedūras, gali kreiptis elektroniniu paštu adresu: *Kostas@pit.ktu.lt.*

LITERATŪRA

[1] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. А. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, Москва, 1980.

[2] Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, Москва, 1978.

[3] Дж. Алберт, Э. Нильсон, Дж. Уолш, *Теория сплайнов и ее приложение*, Мир, Москва, 1972.

Computation of the interpolation of two-dimensial splines of 3-th and 5-th orders

K. Plukas

Computation of the interpolation of two-dimensial splines of 3-th and 5-th orders, when splines are written as a linear combination of B-splines is discussed.

The main attention is focused on the practical aspects of computation.