LMD konf. darbai, 313–316
1997, Vilnius

Daugiamatės tarpusavio sinchronizacijos sistemos matematinio modelio tyrimas

J. Rimas (KTU)

Nagrinėsime lygtį

$$Dx(t) = B_0x(t) + B_1x(t-\tau) + z(t); \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius, $B_0 = -\kappa E$, E – vienetinė šeštosios eilės matrica, κ – koeficientas, $B_1 = \frac{\kappa}{2}B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, τ – pastovus vėlinimas, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(1) lygtis yra ryšio tinklo tarpusavio sinchronizacijos sistemos, sudarytos iš 6-ių sujungtų į žiedą generatorių, matematinis modelis. Jos sprendinys gali būti užrašytas taip [1]:

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L}(A^{-1}B_1e^{-p\tau})^lA^{-1}Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau,$$

čia $A = pE - B_0$, $A^{-1} = \frac{1}{p+\kappa}E$, $Z(p) \div z(t)$.

Panaudoję (2) pažymėjimą, turime

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}}e^{-pl\tau}B^lZ(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau. \tag{3}$$

Iš (3) išplaukia

$$h(t) = \big(h_{ij}(t)\big) + \sum_{l=0}^{L}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p+\kappa)^{l+1}}e^{-pl\tau}B^l, \quad 0 < t < (L+1)\tau; \tag{4}$$

čia $h(t)$ – sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica, $h_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1,6})$ – i-ojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j-ojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį.

Rasime pereinamųjų funkcijų išraiškas. Tuo tikslu apskaičiuosime matricos B l-ąjį laipsnį. Skaičiavimus atliksime pasinaudoję formule

$$B^l = TJ^lT^{-1}; \tag{5}$$

čia J – matricos B Žordano forma. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{6}$$

Pažymėkime

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & & & & 1 \\ 1 & a & 1 & & & \\ & 1 & a & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & 1 & a & 1 \\ 1 & & & & 1 & a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & & & & \\ 1 & a & 1 & & 0 & \\ & 1 & a & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Tada

$$|B - \lambda E| = D_6(-\lambda). \tag{8}$$

Iš (7) išplaukia

$$D_n = a\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2} - 2(-1)^n \tag{9}$$

ir

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \quad (\Delta_2 = a^2 - 1,\ \Delta_1 = a,\ \Delta_0 = 1). \tag{10}$$

Išsprendę (10) skirtuminę lygtį, randame $\Delta_n(a) = U_n(\frac{a}{2})$,

$$D_n(a) = U_n\left(\frac{a}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{a}{2}\right) - 2(-1)^n; \tag{11}$$

čia $U_n(x)$ yra n-ojo laipsnio antrojo tipo Čebyševo daugianaris.

Pasinaudoję lygybe $T_n(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) - U_{n-2}(x))$ [3], turime

$$D_n(a) = 2\left[T_n\left(\frac{a}{2}\right) - (-1)^n\right]; \tag{12}$$

čia $T_n(x)$ yra n-ojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris.

Remdamiesi (8) ir (12) išraiškomis užrašome (6) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes) [3]: $\lambda_1 = -2$ ($l_1 = 1$), $\lambda_2 = -1$ ($l_2 = 2$), $\lambda_4 = 1$ ($l_4 = 2$), $\lambda_6 = 2$ ($l_6 = 1$); čia l_i yra tikrinės reikšmės λ_i kartotinumas.

Paprastajai tikrinei reikšmei λ_i ($i = 1, 6$) matricoje J atitiks viena Žordano ląstelė $J_1(\lambda_i)$. Kartotinei tikrinei reikšmei λ_i ($i = 2, 4$) matricoje J atitiks dvi Žordano ląstelės $J_1(\lambda_i)$, nes rangas $r(B-\lambda_i E)=4$ ir $n-r(B-\lambda_i E)=2$, $i=2,4$ (čia n – matricos B eilė) [2]. Įvertinę tai užrašome matricos B Žordano formą:

$$J=\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & -1 & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Remdamiesi lygybe $J=T^{-1}BT$, randame

$$T=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Randame matricos B l-ąjį laipsnį ($l=1,2,3,\ldots$)

$$B^l=TJ^lT^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \tag{13}$$

čia

$$\begin{aligned} a_1(l)&=(2^l+2)\big[1+(-1)^l\big] & a_2(l)&=(2^l+1)\big[1-(-1)^l\big], \\ a_3(l)&=(2^l-1)\big[1+(-1)^l\big] & a_4(l)&=(2^l-2)\big[1-(-1)^l\big]. \end{aligned} \tag{14}$$

Įstatę (13) į (4) ir atlikę reikiamus pertvarkymus, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą.

$$h(t)=\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix};$$

čia $h_1(t) = e^{-\kappa t}1(t) + g_1(t)$; $h_i(t) = g_i(t)$, $i = 2, 3, 4$;

$$g_i(t) = \frac{1}{6}\sum_{l=1}^{L} a_i(l)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t-l\tau)^l}{l!} e^{-\kappa(t-l\tau)}1(t-l\tau), \quad i = \overline{1,4}, \ 0 < t < (L+1)\tau;$$

$1(t)$ – vienetinė funkcija, $a_i(l)$ ($i = \overline{1,4}$) – žr. (14) išraišką.

Gautos tikslios analizinės pereinamųjų funkcijų išraiškos gali būti panaudotos sistemos dinamikai tirti, jos statistinėms charakteristikoms skaičiuoti, perdavimo funkcijoms ir dažninėms charakteristikoms rasti.

LITERATŪRA

[1] J. Z. Rimas, Issledovanie dinamiki sistem vzaimnoj sinchronizacii, *Radiotechnika*, **32** (2) (1977), 3–9 (rusų k.).

[2] R. Horn and Ch. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1986.

[3] S. Paškovskij, *Vyčislitelnyje primenenija mnogočlenov i riadov Čebyševa*, Maskva, 1983 (rusų k.).

Investigation of the mathematical model of the multidimensional mutual synchronization system

J. Rimas

The mathematical model of the mutual synchronisation system composed of 6 joined into a ring oscillators is investigated. The precise analytical expressions of the elements of the step responses matrix of the system are obtained.