LMD konf. darbai, 343–347
1997, Vilnius

Apie perkėlimo teoremą maksimumų schemoje

A. Aksomaitis (KTU)

1. ĮVADAS

Tarkime, $\{X_j,\ j \geqslant 1\}$ yra nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcijomis $P\{X_j \leqslant x\} = F(x)$, $j \geqslant 1$.

Pažymėkime:

$$Z_n = \max\left(X_j,\ j = \overline{1,n}\right), \qquad Z_{N_n} = \max\left(X_j,\ j = \overline{1,N_n}\right).$$

Čia $\{N_n,\ n \geqslant 1\}$ – sveiki teigiami atsitiktiniai dydžiai, nepriklausantieji nuo $\{X_j,\ j \geqslant 1\}$, su pasiskirstymo funkcijomis $P(N_n \leqslant x) = A_n(x)$, $n \geqslant 1$.

Pateikiame gerai žinomą perkėlimo teoremą ([1]).

TEOREMA. *Tarkime, galioja sąryšiai:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n \leqslant g_n(x)\right) = H(x), \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(nx) = A(x). \tag{2}$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_{N_n} \leqslant g_n(x)\right) = \psi(x). \tag{3}$$

Šioje teoremoje:

1. Pasiskirstymo funkcija:

$$\psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)\, dA(z).$$

2. Normavimo funkcija g_n – tolydi ir monotoniškai didėjanti.
3. Konvergavimas (1) yra silpnas, o H – neišsigimusi pasiskirstymo funkcija.

Kai $A(x)$ išsigimusi taške $x = 1$, pasiskirstymo funkcija $\psi(x) = H(x)$. Tai būdinga daugumai žinomų skirstinių (Puasono, binominis ir kt.).

Mūsų tikslas – išplėsti žinias apie neišsigimusių skirstinių $A(x)$ klasę, o taip pat ištirti konvergavimo į $\psi(x)$ greitį išplėstoje schemoje.

Tarkime h yra tolydžioji funkcija ir $N_n/n \to \xi$, kai $n \to \infty$. Tada perkėlimo teoremos (2) sąlygą mes keičiame sąlygą $h(N_n/n) \to h(\xi)$ ir ribinius ξ skirstinius $P(\xi \leqslant x) = A(x)$ keičiame $h(\xi)$ skirstiniais. Pavyzdžiui, tarkime,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \leqslant x\right) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0,$$

tada, imdami $h(x) = e^x$, gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(h\left(\frac{N_n}{n}\right) \leqslant x\right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geqslant 1.$$

Tai jau Pareto skirstinys.

Mes tirsime aktualų taikymuose atvejį, kai $h(x) = x^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$. Aišku, jog perkėlimo teoremoje galima imti bet kurią tolydžiąją funkciją h, apibrėžtą dešinėje pusašėje.

Pažymėkime: $\eta_n = (N_n/n)^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$.

TEOREMA 1. *Tarkime yra perkėlimo teoremos* (1) *sąlyga ir*

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\eta_n \leqslant x\big) = B(x). \tag{4}$$

Tada yra (3) *sąryšis ir pasiskirstymo funkcija*

$$\psi(x) = \int_0^\infty H^{z^\alpha}(x)\, dB(x) = \int_0^\infty H^z(x)\, dB\big(z^{1/\alpha}\big). \tag{5}$$

Pažymėkime:

$$z_n(x) = n\big(1 - F\big(g_n(x)\big)\big), \qquad \rho_n(x) = z_n(x) + \ln H(x).$$

Pastebėsime, jog sąlyga $\lim_{n\to\infty} z_n(x) = u(x)$ yra būtina ir pakankama sąryšio

$$\lim_{n\to\infty} P\big(Z_n \leqslant g_n(x)\big) = H(x) = e^{-u(x)}$$

sąlyga.

Apibūdinsime konvergavimo greitį 1 teoremoje.

TEOREMA 2. *Tarkime, yra* (1) *ir* (4) *sąlygos ir* $A(+0) = 0$. *Tada su visais* x, *su kuriais* $z_n(x)/n \leqslant 1/2$, *yra teisingas įvertis*:

$$\Delta_{N_n}(x) = \big|P\big(Z_{N_n} < g_n(x)\big) - \psi(x)\big| \leqslant \Delta_n(x) \int_0^\infty z^\alpha\big(\delta_n(x)H(x)\big)^{z^\alpha - 1}\, dP(\eta_n \leqslant z)$$

$$+ \left| \int_0^\infty \big(P(\eta_n \leqslant z) - B(z)\big)\, dH^{z^\alpha}(x)\right|. \tag{6}$$

Čia $\Delta_n(x)$ – neatsitiktinio skaičiaus komponentų maksimumo konvergavimo greičio įvertis

$$\left|P\big(Z_n < g_n(x)\big) - H(x)\right| \leqslant \Delta_n(x),$$

pateiktas J. Galambošo teoremoje ([2]), o funkcija

$$\delta_n(x) = \max\left(1, e^{-\rho_n(x)}\right).$$

Pateiksime vieną 1 ir 2 teoremų atskirą atvejį.

TEOREMA 3. *Tarkime, N_n skirstinys yra geometrinis:*

$$P(N_n = j) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}, \quad j \geqslant 1.$$

Tada

$$\psi(x) = \frac{1}{1 + u(x)} \quad ir \quad \Delta_{N_n}(x) \leqslant 2\psi^2(x)\left(\frac{\Delta_n(x)}{H(x)} + \frac{u(x)\psi(x)}{n}\right). \tag{7}$$

2. TEOREMŲ ĮRODYMAI

1 teoremos įrodymas. Kadangi N_n ir X_j nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai

$$\begin{aligned} P\big(Z_{N_n} \leqslant g_n(x)\big) &= \sum_{j\geqslant 1} F^j\big(g_n(x)\big)P(N_n = j) \\ &= \sum_{j\geqslant 1} \big(F^n\big(g_n(x)\big)\big)^{j/n} P\left(\eta_n = \left(\frac{j}{n}\right)^{1/\alpha}\right) \\ &= \int_0^\infty F^{nz^\alpha}\big(g_n(x)\big)\, dP(\eta_n \leqslant z). \end{aligned}$$

Iš čia

$$\lim_{n\to\infty} P\big(Z_{N_n} \leqslant g_n(x)\big) = \int_0^\infty H^{z^\alpha}(x)\, dB(z).$$

Teorema įrodyta.

2 teoremos įrodymas. Įrodymas grindžiamas sąryšiu:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}(x) \leqslant &\left|P\big(Z_{N_n} < g_n(x)\big) - \mathbf{E}H^{N_n/n}(x)\right| \\ &+ \left|\mathbf{E}H^{N_n/n}(x) - \psi(x)\right| = \Delta_{N_n}^{(1)}(x) + \Delta_{N_n}^{(2)}(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Įvertis

$$\Delta_{N_n}^{(1)}(x) \leqslant \Delta_n(x) \int_0^\infty z\bigl(\delta_n(x)H(x)\bigr)^{z-1}\, dA_n(nz) \tag{9}$$

pateiktas [3]. Po keitinio $z = y^\alpha$ ir sąryšio $P(\eta_n \leqslant x) = A_n(x^\alpha n)$, gauname (6) sąryšyje pirmąjį dėmenį.

Toliau:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}^{(2)}(x) &= \Bigl|\sum_{j\geqslant 1} H^{j/n}(x)P(N_n = j) - \psi(x)\Bigr| \\ &= \Bigl|\int_0^\infty H^z(x)\, d\bigl(A_n(uz) - A(z)\bigr)\Bigr| \\ &= \Bigl|\int_0^\infty \bigl(A_n(nz^\alpha) - A(z^\alpha)\bigr)\, dH^{z^\alpha}(x)\Bigr| \\ &= \Bigl|\int_0^\infty \bigl(P(\eta_n \leqslant z) - B(z)\bigr)\, dH^{z^\alpha}(x)\Bigr|. \end{aligned} \tag{10}$$

3 teoremos įrodymas. Kai N_n yra geometrinis

$$P\bigl(\eta_n \leqslant x\bigr) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx^\alpha - \{nx^\alpha\}}.$$

Čia $\{nx^\alpha\}$ yra skaičiaus nx^α trupmeninė dalis.

Tada

$$\lim_{n\to\infty} P\bigl(\eta_n \leqslant x\bigr) = 1 - e^{-x^\alpha}, \quad x > 0$$

ir ribinis skirstinys $B(x) = 1 - e^{-x^\alpha}$ yra Veibulo.

Su visais $z \in [0, n]$

$$0 \leqslant e^{-z} - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \leqslant z^2 e^{-z} n^{-1}.$$

Tokiu būdu,

$$\bigl|P(\eta_n \leqslant x) - B(x)\bigr| \leqslant \frac{x^{2\alpha} e^{-x^\alpha}}{n}.$$

Toliau:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}^{(2)}(x) &= \Bigl|\int_0^\infty \bigl(P(\eta_n \leqslant z) - B(z)\bigr)\, dH^{z^\alpha}(x)\Bigr| \\ &\leqslant \frac{u(x)}{n} \int_0^\infty z^2 e^{-z(1-u(x))} dz = \frac{2u(x)}{n(1-u(x))^3}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{N_n}^{(1)}(x) &\leqslant \Delta_n(x)\int_0^\infty z^\alpha\big(H(x)\big)^{z^\alpha-1} dP(\eta_n \leqslant z)\\ &= \Delta_n(x)\int_0^\infty zH^{z-1}(x)\,dA_n(uz) \leqslant \frac{2\Delta_n(x)}{H(x)(1+u(x))^2}.\end{aligned} \tag{12}$$

Iš (11) ir (12) išplaukia (7) teoremos teiginys.

Kadangi

$$B\big(z^{1/\alpha}\big) = A(z) = 1 - e^{-x}$$

tai

$$\psi(x) = \int_0^\infty e^{-u(x)z} d\big(1 - e^{-x}\big) = \frac{1}{1+u(x)}.$$

Teorema įrodyta.

Pastaba. Jei skirstinys N_n yra tolygusis:

$$P\big(N_n = j\big) = \frac{1}{n}, \quad j = \overline{1, n},$$

tai $A(x) = x$, $x \in (0, 1)$. Tada, imdami $\eta_n = (N_n/n)^{1/\alpha}$, gautume, jog $B(x) = x^\alpha$, $x \in (0, 1)$. Dabar nesunku įvertinti $|P(\eta_n \leqslant x) - B(x)|$, o po to ir konvergavimo į $\psi(x)$ greitį.

LITERATŪRA

[1] B. V. Gnedenko, D. B. Gnedenko, Apie Laplaso ir logistinį skirstinius tikimybių teorijos ribinėse teoremose, *Serdika*, **8** (1982), 229–234 (rusų k.).

[2] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, John Willey, New York, 1984.

[3] A. Aksomaitis, The nonuniform estimation of the convergence rate in the transfer theorem for extremal values, *Liet. Matem. Rink.*, **27** (1987), 219–223.

On the transference theorem in a max-scheme

A. Aksomaitis (KTU)

The generalized transference theorem named after B. V. Gnedenko has been proved. Illustrative examples are presented.