

Neholonominių kompleksų $NGr(1, 5, 5)$ geometrija

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas

Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius

E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjami n -matės Euklido erdvės hiperpaviršiaus aukštesnių eilių glaustiniai hiperpaviršiai. Tai leidžia nagrinėti duotojo hiperpaviršiaus geometrines savybes jo taško aukštesnių eilių diferencialinėse aplinkose.

Raktiniai žodžiai: Grasmano daugdara, projektyvinė atitiktis, tiesių kompleksas.

Tarkime, kad $Gr(1, 5)$ – aštuonmatė penkiamatės projektyvinės erdvės P_5 visų tiesių Grasmano daugdara. Nagrinėsime jos glodų penkiamatį padaugdarį $Gr(1, 5, 5)$ t.y. erdvės P_5 penkiamatį tiesių kompleksą. Tarkime, kad $\{A_i\}$ ($i, j, k, \dots = 1, \dots, 6$) yra erdvės P_5 judamasis reperis, sudarytas iš 6 tiesiškai nepriklausomų analizinių taškų. Tokio reperio judėjimas aprašomas lygtimis

$$\begin{aligned}dA_i &= \omega_i^j A_j, \\d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j.\end{aligned}$$

Taškus A_1 ir A_2 patalpinkime komplekso $Gr(1, 5, 5)$ tiesėje l . Atlikus dalinę reperio kanonizaciją, tiesių komplekso $Gr(1, 5, 5)$ lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \omega_1^4 + \omega_2^3 = 0, \\ \omega_1^5 + \omega_2^4 = 0, \\ \omega_1^6 + \omega_2^5 = 0; \end{cases} \quad (1)$$

atitinkamos išorinės kvadratinės lygtys čia yra praleidžiamos.

Tiesių komplekso $Gr(1, 5, 5)$ pirmasis fundamentalusis diferencialinis–geometrinis objektas $H^{(1)}(Gr(1, 5, 5))$ nustato atitiktį

$$K^3(l): M(t^1, t^2) = t^1 A_1 + t^2 A_2 \longleftrightarrow \Pi_2(M(t^1, t^2)) : \begin{cases} t^2 x^4 - t^1 x^3 = 0, \\ t^2 x^5 - t^1 x^4 = 0, \\ t^2 x^6 - t^1 x^5 = 0 \end{cases}$$

tarptiesės $l = (A_1 A_2)$ taškų M ir dvimačių plokštumų $\Pi_2(M)$. Visos tiesių komplekso $Gr(1, 5, 5)$ tiesės, einančios per bet kurią fiksuotą tiesės l tašką M , sudaro dvimatį kūgį $I_2(M)$ su viršūne taške M . Šio dvimačio kūgio dvimate liečiamąja plokštuma yra $\Pi_2(M)$. Kai taškas M juda tiese l dvimatės plokštumos $\Pi_2(M)$ keičiasi ir aprašo

trimatį antrosios eilės kūgį K_2 su viršūne l :

$$K_2 : \begin{cases} x^3x^5 - (x^4)^2 = 0, \\ x^3x^6 - x^4x^5 = 0, \\ x^4x^6 - (x^5)^2 = 0. \end{cases}$$

Projektyvinę atitikį $K^3(l)$ vadinsime pagrindine tiesių komplekso $Gr(1, 5, 5)$ atitiktimi.

Tris tiesės l taškus

$$M_a = A_1 + t_a A_2 \quad (a = 1, 2, 3)$$

atitinka trys dvimatės plokštumos $\Pi_2(t_a)$, asocijuotos su šiais taškais. Jos apibrėžia hiperplokštumą

$$\Pi_4(t_1, t_2, t_3): x^3 - (t_1 + t_2 + t_3)x^4 + (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)x^5 - t_1t_2t_3x^6 = 0.$$

Taip gauname naują projektyvitetą

$$(M_1, M_2, M_3) \longleftrightarrow \Pi_4(t_1, t_2, t_3),$$

kuris trims taškams priskiria hiperplokštumą. Ribiniu atveju, kada $t_a \rightarrow t$ ($a = 1, 2, 3$), gauname dar vieną hiperplokštumą

$$\Pi_4: x^3 - 3tx^4 + 3t^2x^5 - t^3x^6 = 0.$$

Neholonominiu kompleksu $NGr(1, 5, 5)$ vadinsime Grasmano daugdarą $Gr(1, 5)$ su joje apibrėžtu atitikčių lauku $K^3(l)$.

Pažymėkime

$$\begin{cases} \vartheta_{11} = 10\omega_1^2 - \omega_4^3 - 2\omega_5^4 - 3\omega_6^5, \\ \vartheta_{12} = -\frac{1}{2}(10\omega_1^1 - 10\omega_2^2 + 3\omega_3^3 + \omega_4^4 - \omega_5^5 - 3\omega_6^6), \\ \vartheta_{22} = 3\omega_3^4 + 2\omega_4^5 + \omega_5^6 - 10\omega_2^1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{1111} = \omega_5^3 + 3\omega_6^4, \\ \vartheta_{1112} = \frac{1}{2}(\omega_4^3 - 3\omega_6^5), \\ \vartheta_{1122} = \frac{1}{2}(\omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_5^5 + \omega_6^6), \\ \vartheta_{1222} = \frac{1}{2}(\omega_5^6 - 3\omega_3^4), \\ \vartheta_{2222} = 3\omega_3^5 + \omega_4^6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_{111111} = -\omega_6^3, \\ \vartheta_{111112} = \frac{1}{6}(3\omega_6^4 - \omega_5^3), \\ \vartheta_{111122} = \frac{1}{15}(3\omega_5^4 - \omega_4^3 - 3\omega_6^5), \\ \vartheta_{111222} = \frac{1}{20}(3\omega_4^4 - \omega_3^3 - 3\omega_5^5 + \omega_6^6), \\ \vartheta_{112222} = \frac{1}{15}(3\omega_3^4 - 3\omega_4^5 + \omega_5^6), \\ \vartheta_{122222} = \frac{1}{6}(\omega_4^6 - 3\omega_3^5), \\ \vartheta_{222222} = \omega_3^6. \end{cases}$$

Neholonominio komplekso $NGr(1, 5, 5)$ diferencialinės lygtys yra tokios:

$$\vartheta_{p_1 \dots p_{2a}} = L_{p_1 \dots p_{2a}, I}^p \omega_p^I,$$

čia $a = 1, 2, 3$; $p, q, p_1, p_2, \dots = 1, 2$; $I, J, K \dots = 3, \dots, 6$; dydžiai $L_{p_1 \dots p_{2a}, I}^p$ yra simetriški indeksų p_1, \dots, p_{2a} atžvilgiu. Diferencialinis – geometrinis objektas $\{L_{p_1 \dots p_{2a}, I}^p\}$ algebrškai panašus į diferencialinį–geometrinį objektą

$$\{A_{p_1 p_2}, A_{p_1 \dots p_4}, A_{p_1 \dots p_6}, A_{p_1 \dots p_8}, A_{p_1 \dots p_{10}}, B, B_{p_1 p_2}, B_{p_1 \dots p_4}, B_{p_1 \dots p_6}, B_{p_1 \dots p_8}, \\ C_{p_1 \dots p_4}, B_{p_1 \dots p_6}, B_{p_1 \dots p_8}, \tilde{C}_{p_1 p_2}, \tilde{C}_{p_1 \dots p_4}, \tilde{C}_{p_1 \dots p_6}, \bar{C}, \bar{C}_{p_1 p_2}, E_{p_1 p_2}, E_{p_1 \dots p_4}, E_{p_1 \dots p_6}\}.$$

Kiekviena iš dydžių sistemų

$$\{A_{p_1 \dots p_{10}}\}, \quad \{A_{p_1 \dots p_8}\}, \quad \{A_{p_1 \dots p_6}\}, \\ \{B_{p_1 \dots p_8}\}, \quad \{B_{p_1 \dots p_6}\}, \quad \{E_{p_1 \dots p_6}\}$$

yra savarankiškas diferencialinis–geometrinis objektas (tenzorius).

Pažymėkime

$$\begin{cases} g = B, \\ g_{p_1 p_2} = B_{p_1 p_2} - 42A_{p_1 p_2} + \frac{3}{10}E_{p_1 p_2}, \\ g_{p_1 \dots p_4} = 10A_{p_1 \dots p_4} + B_{p_1 \dots p_4}, \\ G_{p_1 \dots p_4} = 70A_{p_1 \dots p_4} + E_{p_1 \dots p_4}, \\ g_{p_1 \dots p_6} = -9A_{p_1 \dots p_6} + \frac{1}{10}E_{p_1 \dots p_6}, \\ g_{p_1 \dots p_8} = 30A_{p_1 \dots p_8} + B_{p_1 \dots p_8}. \end{cases}$$

Dydžių sistema

$$\{g, g_{p_1 p_2}, g_{p_1 \dots p_4}, G_{p_1 \dots p_4}, g_{p_1 \dots p_6}, g_{p_1 \dots p_8}\}$$

sudaro neholonominio komplekso $NGr(1, 5, 5)$ pirmąjį neholonomiškumo objektą. Diferencialinių 1-formų sistema

$$\omega_1^4 + \omega_2^3, \quad \omega_1^5 + \omega_2^4, \quad \omega_1^6 + \omega_2^5$$

yra pilnai integruojam tik tada, kada pirmojo neholonomiškumo objekto visos komponentės yra lygios nuliui.

Tenzorius $A_{p_1 \dots p_{10}}$ tiesėje l apibrėžia 10 taškų, kurių koordinatės tenkina lygtį

$$A_{p_1 \dots p_{10}} t^{p_1} \dots t^{p_{10}} = 0$$

(inflekciniai centrai; čia $t = t^2 : t^1$).

Darbe įrodoma, kad tiesinis tiesių kompleksas $LGr(1, 5, 5)$, apibrėžiamas lygtimis

$$p^{13} + p^{42} = - \left(\frac{15}{2} A_{112222} + \frac{1}{5} E_{22} \right) p^{34} - \left(15 A_{111222} - \frac{1}{5} E_{12} \right) p^{35} - \frac{15}{2} A_{111122} p^{36} \\ - \left(\frac{45}{2} A_{111122} + \frac{1}{5} E_{11} \right) p^{45} - 15 A_{111112} p^{46} - \frac{15}{2} A_{111111} p^{56},$$

$$\begin{aligned}
p^{14} + p^{52} &= \frac{15}{2}A_{122222}p^{34} + \left(15A_{112222} - \frac{1}{10}E_{22}\right)p^{35} + \left(\frac{15}{2}A_{111222} - \frac{1}{10}E_{12}\right)p^{36} \\
&\quad + \left(\frac{45}{2}A_{111222} - \frac{1}{10}E_{11}\right)p^{45} + \left(15A_{111222} - \frac{1}{10}E_{11}\right)p^{46} + \frac{15}{2}A_{111112}p^{56}, \\
p^{15} + p^{62} &= -\frac{15}{2}A_{222222}p^{34} - 15A_{122222}p^{35} - \frac{15}{2}A_{112222}p^{36} \\
&\quad - \left(\frac{45}{2}A_{112222} + \frac{1}{5}E_{22}\right)p^{45} - \left(15A_{111222} + \frac{1}{5}E_{12}\right)p^{46} - \\
&\quad - \left(\frac{15}{2}A_{111122} + \frac{1}{5}E_{11}\right)p^{56},
\end{aligned}$$

yra invariantinis.

Literatūra

- [1] H. Pottmann and J. Wallner. *Computational Line Geometry*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 2001.

SUMMARY

Geometry of nonholonomic complexes $NGr(1, 5, 5)$

K. Navickis

In this article the differential geometry of nonholonomic complexes in five dimensional projective space is considered. The algebraic structure of the first fundamental object is considered and the geometrical interpretations of some comitants of the first fundamental object are given.

Keywords: Grassmann manifold, projective correspondence, complex of lines.