Lietuvos matematikos rinkinys ISSN 0132-2818
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B www.mii.lt/LMR/
56 t., 2015, 80–84

Uždavinys ir jo atsakymas

Juozas Juvencijus Mačys[1], Jurgis Sušinskas[2]

[1] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas*
Akademijos 4, LT-08663 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Medicinos fakultetas*
Čiurlionio 21, LT-03101 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt, jurgis.susinskas@mii.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje atkreipiamas dėmesys į tai, kad dažnai pravartu bandyti atspėti pilną ar bent dalinį uždavinio atsakymą. Klausimas iliustruojamas nagrinėjant kelis olimpiadinius uždavinius.

Raktiniai žodžiai: olimpiados, uždavinio atsakymas, sprendimo paieška.

Kai uždavinys matytas ir suprantamas, jokių problemų paprastai nekyla. Sunkumai prasideda susidūrus su uždaviniu, kurį reikia „spręsti, kai nežinai kaip“. Matematikai sukūrė visą mokslą, kaip tada reikėtų elgtis. Patarimų yra gausybė (žr. [5, 4]):

- prisimink panašų uždavinį,
- pabandyk išspręsti paprastesnį uždavinį,
- įsivesk patogius žymėjimus,
- pagalvok apie nežinomųjų keitimą, ir t. t. ir pan.

Šį kartą pavyzdžiais parodysime, kaip gali palengvėti uždavinio sprendimas, kai pavyksta atspėti uždavinio atsakymą – arba bent dalį atsakymų. Kitaip sakant, į naudingų patarimų sąrašą visada verta įsitraukti tokį:

- pabandyk apčiuopti (atspėti, surasti, numatyti, sugalvoti, ...) atsakymą.

Sprendžiant lygtį ar lygčių sistemas, tai reiškia, kad verta paspėlioti ir iš anksto žinoti bent vieną ar kelis sprendinius. Savaime aišku, kad jeigu sugalvoję sprendimo kelią ir spręsdami to sprendinio negautume, tai mūsų sprendimas neteisingas – pažeista logika, padaryta klaida skaičiuojant ir pan. Beje, atliekant sudėtingus pertvarkymus klaidos tikimybė labai padidėja, o turint sprendinį galima save kontroliuoti – žiūrėti, ar jis vis dar „tinka“.

Pailiustruosime tai keliais konkrečiais pavyzdžiais.

Šių (2015) metų Lietuvos mokinių olimpiados dalyviai iš 11 ir 12 klasių sprendė tokį uždavinį.

1. *Turime lygčių sistemą*

$$\begin{cases} x^3 - x^2 = 2y, \\ 8y^3 - 4y^2 = x. \end{cases} \tag{1}$$

a) *Nurodykite bent du jos realiuosius sprendinius,* *b) Raskite visus jos realiuosius sprendinius.*

Sprendimas. Matome, kad punktas a) primygtinai siūlo mokiniui paspėlioti atsakymus. Jeigu jis ir nenujaučia, kaip tai svarbu sprendžiant, tai bent suvokia, kad už tai gaus brangius taškus (kiekvienas uždavinys vertinamas 7 taškais, taigi už punktą b) buvo skiriami visi taškai, o jo neįveikus vien už punktą a) buvo skiriami 2 taškai).

Nors uždavinį galima spręsti ir be to, bet jau anksčiau paminėtas patogus keitinys čia labai praverčia: akivaizdu, kad $2y$ verta pavadinti, pavyzdžiui, u, ir sistema tampa

$$\begin{cases} x^3 - x^2 = u, \\ u^3 - u^2 = x. \end{cases} \tag{2}$$

Šios sistemos pranašumas prieš (1) sistemą labai ryškus: viena – jos koeficientai nebemirga, jų tiesiog „nebėra“, taigi jie nebetemdo žvilgsnio. Bet svarbiausia, kad sistema tapo simetrine (t. y., ji nesikeičia pakeitus $x \to u$, $u \to x$), ir pamatysime, kaip tai svarbu.

Taigi spėliokime (2) sistemos atsakymus. Jau vien dėl simetriškumo aišku, kad užtenka spėlioti tik x reikšmes. Iš karto pastebime, kad tinka $x = 0$. Tada iš pirmos lygties $u = 0$, ir antra lygtis tenkinama. Vieną (2) sistemos sprendinį jau turime: $x = 0$, $u = 0$. Beje, už tą vienintelį sprendinį taškai olimpiadoje nebuvo skiriami.

Ieškome kitų sprendinių – bandome sveikuosius skaičius. Bet $x = 1$ netinka, nes tada iš pirmos lygties $u = 0$, o antra lygtis duoda $x = 0$. Nepavyksta aptikti ir sprendinių su kitais sveikaisiais x (matysime, kad jų ir nėra).

Pasvarstykime, kuo dar ypatinga (2) sistema. Kadangi x ir u tokie „panašūs“ (vienodai įeina į abi lygtis), tai verta patikrinti, ar negali jie būti tiesiog lygūs, t. y. $x = u$. Tada sistema virsta lygtimi

$$x^3 - x^2 - x = 0, \tag{3}$$

arba

$$x\bigl(x^2 - x - 1\bigr) = 0.$$

Atvejį $x = 0$ jau aptarėme, todėl lieka išspręsti lygtį

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

kuri turi du sprendinius $x = (1 + \sqrt{5})/2$ ir $x = (1 - \sqrt{5})/2$. Kadangi jie iracionalūs, tai dabar aišku, kodėl anksčiau nepavyko jų atspėti.

Taigi žinome tris (2) sistemos sprendinius. Bet išspręsti sistemą reiškia rasti visus jos sprendinius. Kitaip sakant, reikia rasti likusius sprendinius arba įrodyti, kad daugiau jų nėra.

Spręskime (2) sistemą. Standartinis sistemų sprendimo būdas – išsireikšti vieną iš kintamųjų kitu (ar kitais), ir kintamųjų bus „mažiau“. Pirmoje (2) sistemos lygtyje u jau išreikštas iksu, taigi lieka $u = x^3 - x^2$ įstatyti į antrą lygtį:

$$\bigl(x^3 - x^2\bigr)^3 - \bigl(x^3 - x^2\bigr)^2 - x = 0. \tag{4}$$

Iš pradžių gali pasirodyti, kad išspręsti gautą aukšto laipsnio lygtį neįmanoma. Bet paaiškėja, kad žinant atspėtuosius sprendinius tai ne taip jau ir sudėtinga. Iš tikrųjų, žinome, kad (4) lygtis turi sprendinius 0, $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Bet šie sprendiniai – tai ir

(3) lygties sprendiniai, todėl iš (4) lygties kairiosios pusės turėtų išsikelti reiškinys x^3-x^2-x. Dabar jau paprasčiau: (4) lygties kairiosios pusės dėmenį $(x^3-x^2)^3$ reikia papildyti dėmeniu $-x^3$, o tada kubų skirtumą $(x^3-x^2)^3-x^3$ galima išskaidyti ir gauti norimą dauginamąjį:

$$\big(x^3-x^2\big)^3-x^3=\big(x^3-x^2-x\big)\big[\big(x^3-x^2\big)^2+x\big(x^3-x^2\big)+x^2\big].$$

Dar paprasčiau susitvarkyti su dėmeniu $(x^3-x^2)^2$, papildžius jį dėmeniu $-x^2$ ir išskaidžius kvadratų skirtumą. Taigi skaidome (4) lygties kairę pusę:

$$\begin{aligned}&\big(x^3-x^2\big)^3-\big(x^3-x^2\big)-x\\&\quad=\big(x^3-x^2\big)^3-x^3-\big(x^3-x^2\big)^2+x^2-x+x^3-x^2\\&\quad=\big(x^3-x^2-x\big)\big(x^6-2x^5+2x^4-x^3+x^2\big)\\&\qquad-\big(x^3-x^2-x\big)\big(x^3-x^2+x\big)+\big(x^3-x^2-x\big)\\&\quad=\big(x^3-x^2-x\big)\big(x^6-2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-x+1\big).\end{aligned}$$

Lygtį $x^3-x^2-x=0$ jau sprendėme, taigi liko lygtis

$$x^6-2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-x+1=0.$$

Jau buvome užsiminę, kad ši lygtis šaknų gali neturėti. Ir iš tikrųjų, nesunku įsitikinti, kad kairė pusė visada teigiama. Tai akivaizdu išskyrus dvinarių kvadratus:

$$\begin{aligned}&\big(x^3-x^2\big)^2+x^4-2x^3+2x^2-x+1\\&\quad=\big(x^3-x^2\big)^2+\big(x^2-x\big)^2+x^2-x+1\\&\quad=\big(x^3-x^2\big)^2+\big(x^2-x\big)^2+(x-1/2)^2+3/4>0.\end{aligned}$$

Taigi (2) sistemos sprendiniai yra $(x;u)=(t;t)$, $t\in\{(1-\sqrt{5}\,)/2,0,(1+\sqrt{5}\,)/2\}$. Grįžę prie (1) sistemos nežinomojo $y=u/2$, randame jos sprendinius.

Atsakymas. $(x;y)=(t;t/2), t\in\{(1-\sqrt{5}\,)/2,0,(1+\sqrt{5}\,)/2\}$.

Apžvelgiant šį sprendimą, pasidaro aišku, kad išspręsti (4) lygtį, nežinant jos sprendinių iš anksto, vargu ar įmanoma. Kitoks šios sistemos sprendimas pateiktas apžvalgoje [2] (ten pateikiamos visos olimpiados užduotys ir sprendimai). Kad skaitytojas susidarytų pilnesnį vaizdą, trumpą, rafinuotą sprendimą surašysime ir čia.

Grįžkime prie (2) sistemos. Atimkime vieną lygtį iš kitos ir skaidykime:

$$x^3-u^3-\big(x^2-u^2\big)=-(x-u),$$
$$(x-u)\big(x^2-xu+u^2-x-u+1\big)=0.$$

Antras dauginamasis ikso atžvilgiu yra kvadratinis trinaris

$$x^2+x(u-1)+u^2-u+1.$$

Jis visada teigiamas, nes jo diskriminantas

$$(u-1)^2-4\big(u^2-u+1\big)=-3u^2+2u-4=-2u^2-(u-1)^2-3$$

neigiamas. Lieka pažįstamas atvejis $x=u$. Sprendimas baigtas.

Čia gal visai pritiktų nedidelis ekskursas į olimpiadų virtuvę. Nusprendę duoti šį uždavinį, rengėjai ilgai svarstė, kaip formuluoti sąlygą. Buvo nagrinėjami tokie variantai.

A. *Išspręskite lygtį*

$$\left(x^3 - x^2\right)^3 - \left(x^3 - x^2\right)^2 = x.$$

B. *Išspręskite sistemą*

$$\begin{cases} x^3 - x^2 = y, \\ y^3 - y^2 = x. \end{cases}$$

C. *Išspręskite sistemą*

$$\begin{cases} x^3 - x^2 = 2y, \\ 8y^3 - 4y^2 = x. \end{cases}$$

D. *Duota sistema B.*

a) Nurodykite bent du jos sprendinius.

b) Raskite visus jos sprendinius

E. *Duota sistema C.*

a) Nurodykite bent du jos sprendinius.

b) Raskite visus jos sprendinius.

Spręsdami matėme, kad sunkiausias būtų variantas A – čia sunku apčiuopti kitą kelią, nei įsivesti antrą nežinomąjį $y = x^3 - x^2$. Tada gauname sistemą B ir žinome bent du jos sprendimo būdus:

1) atimti vieną lygtį iš kitos;

2) atspėti sprendinius imant $x = y$ ir jais pasinaudoti sprendžiant lygtį A.

Šiek tiek sunkesnis sistemos B variantas būtų sistema C. Pagaliau D ir E verčia spėti sistemos atsakymus, o juos atspėjus, kaip jau matėme, sistemą spręsti lengviau. Olimpiadai pasirinktas variantas E: viena, jis moko isivesti patogesnius žymėjimus; antra, gautą sistemą galima spręsti ne vieninteliu būdu (kitaip būtų su variantu A – vienintelis realus būdas yra įsivesti antrą nežinomąjį).

Nagrinėkime kitą pavyzdį – uždavinį iš 2014 m. olimpiados (sprendimą žr. [1]; beje, visų olimpiadų užduotis galima rasti [3]).

2. (9–10 klasės). *Raskite visas sveikųjų skaičių poras* $(m; n)$, *su kuriomis teisinga lygybė*

$$(n + 101)(n + 102)(n + 103)(n + 104) = (m + 1)(m + 2). \tag{5}$$

Sprendimas. Nepradėkime spręsti, nepaspėlioję atsakymų. Daug jų (o gal ir visus?) atspėjame, matydami, kada kairėje ar dešinėje gausime 0: tai reikšmės $n = -101, -102, -103, -104$ ir $m = -1$, $m = -2$.

Beje, jei nagrinėsime tik dešinę pusę, turime duodančias 0 reikšmes $m = -1$, $m = -2$, su jomis ir kairė turi būti lygi 0, taigi jau turime $2 \cdot 4 = 8$ sprendinius. Žodžiu, jeigu įrodytume, kad tinka tik $m = -1$ ir $m = -2$, tai uždavinys būtų išspręstas.

Ir vėl, įžymiojo matematiko ir filosofo D. Pojos patarimas – įsivesti patogius žymėjimus (žr. [5, 4]). Žinoma, tai, pavyzdžiui, $n + 101 = r$. Tada kairė pusė virsta $r(r + 1)(r + 2)(r + 3)$. Natūralu sudauginti pirmą ir ketvirtą, taip pat antrą ir trečią skaičius: $(r^2 + 3r)(r^2 + 3r + 2)$. Dabar prisiminkime būdingą greitosios daugybos pavyzdėlį: $99 \cdot 101 = (100-1)(100+1) = 100^2 - 1^2 = 9999$. Analogiškai kairę pusę galima užrašyti kaip

$$\left(r^2 + 3r + 1 - 1\right)\left(r^2 + 3r + 1 + 1\right) = \left(r^2 + 3r + 1\right)^2 - 1.$$

Kad tuo pačiu pavyzdžiu galima būtų pasinaudoti dešinėje, verta (5) lygtį padauginti iš 4:

$$4\left(r^2 + 3r + 1\right)^2 - 4 = (2m+2)(2m+4).$$

Dešinė virsta $(2m+3)^2 - 1$, ir turime lygtį

$$\left(2r^2 + 6r + 2\right)^2 - (2m+3)^2 = 3. \tag{6}$$

Čia galima būtų pažymėti $x = 2m + 3$, $y = 2r^2 + 6r + 2$, iš lygties $y^2 - x^2 = 3$ gauti 4 sistemas

$$\begin{cases} y - x = 1, \quad -1, \quad 3, \quad -3, \\ y + x = 3, \quad -3, \quad 1, \quad -1 \end{cases}$$

ir jas spręsti. Bet (6) lygtyje matome dviejų kvadratų skirtumą, ir užrašius kvadratų seką $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$, iš karto aišku, kad skirtumą 3 duoda tik $4 - 1$, t. y. tik $y^2 = 4$, $x^2 = 1$, o tai reiškia, kad $2m + 3 = \pm 1$, $m = -1$ arba $m = -2$.

Sprendimas baigtas.

Atsakymas.

$$\begin{aligned}(m,n) = {} & (-1;-101), (-1;-102), (-1;-103), (-1;-104), (-2;-101), \\ & (-2;-102), (-2;-103), (-2;-104).\end{aligned}$$

Literatūra

[1] A. Dubickas. *2014 metų Lietuvos mokinių olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai.* Adresas internete: http://www.mif.vu.lt/∼dubickas.

[2] A. Dubickas. *2015 metų Lietuvos mokinių olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai.* Adresas internete: http://www.mif.vu.lt/∼dubickas/.

[3] *Matematikos olimpiados.* Adresas internete: https://mif.vu.lt/lt2/matematikos-olimpiados.

[4] D. Poiya. *Kak Reshat' Zadachu.* Librekom, Moscow, 4th edition, 2010. ISBN 978-5-397-0124-6 (Russian translation of [5]).

[5] G. Polya. *How to Solve It.* Princeton University Press, 2nd edition, 1957. ISBN 0-691-08097-6.

SUMMARY

A problem and its answer

J.J. Mačys, J. Sušinskas

In the article attention is given to the fact that knowing of a partial or complete answer to a math problem can be a big help in solving it. The subject is illustrated by solving some math contest problems.

Keywords: olympiads, search of solution, guessing answer.