Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 407–411

Kolmogorovo uždavinys Markovo grandinėms

Marijus Jūris MIKALAUSKAS (VU)
el. paštas: m.mikalauskas@it.lt

Reziumė. Tyrimo objektu yra atsitiktinių dydžių, sudarančių dviejų būsenų Markovo grandinę, sumos serijų schemoje. Šių sumų skirstiniai aproksimuojami parametrine matų šeima, sudaryta iš visų galimų tokių sumų ribinių skirstinių, diskretizuotų tolydžiais atvejais. Sprendžiamas Kolmogorovo uždavinys: vertinamas aproksimavimo tikslumas, parenkant tinkamiausią matą iš parametrinės šeimos. Straipsnyje aprašomas bendras Kolmogorovo uždavinio sprendimo metodas bei pateikiami galutiniai rezultatai aproksimuojant vienu iš matų.

Raktiniai žodžiai: Markovo grandinė, Kolmogorovo uždavinys, asimptotinis skleidinys, variacijos metrika.

1. Uždavinys

Nagrinėjama homogeninė dviejų būsenų Markovo grandinė su būsenomis E_1 ir E_2, pradine būsena E_1 ir perėjimo tikimybių matrica $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & q \\ \overline{q} & \overline{p} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

kur $p + q = 1$ ir $\overline{q} + \overline{p} = 1$.

Pažymėkime $X_k(n)$ atsitiktinius dydžius, įgyjančius reikšmes 1 ir 0, kai grandinė patenka į būsenas E_1 ir E_2, atitinkamai. Pastebėsime, kad nagrinėjama serijų schema, t.y. perėjimo tikimybių matrica priklauso nuo n. Tokiu būdu, atsitiktinė nulių ir vienetų seka $\{X_k(n),\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ sudaro Markovo grandinę su pradine būsena 1 ir perėjimo tikimybių matrica $\mathbf{P}$.

Nagrinėsime atsitiktinių dydžių $X_k(n)$ sumą

$$\xi_n = X_1(n) + X_2(n) + \cdots + X_n(n). \tag{1.2}$$

Šios sumos tikimybinį matą žymėsime $P_n(m|p, \overline{p}) = P\{\xi_n = m\}$.

Dobrušin [4] darbe parodė, kad neišsigimusiais ribiniais skirstiniais tiriamos statistikos ξ_n tiesinėms funkcijoms tegali būti 7 tikimybiniai skirstiniai.

Mešalkin [7], Iljaščenko [5] ir Anisimov [1] savo darbuose tyrė bendresnį baigtinio būsenų skaičiaus atvejį ir taipogi užrašė visus galimus ribinius skirstinius. Klausimas apie tesingą konvergavimo greitį ir optimalų aproksimuojančio mato bei jo parametrų parinkimą bet kokioms Markovo grandinės tikimybių p ir $\overline{p}$ reikšmėms yra atviras iki šiol.

Tyrimo tikslu yra Kolmogorovo uždavinio (žr., [6]) sprendimas aprašytai dviejų būsenį Markovo grandinei, t.y. radimas funkcijos $\rho_0(n)$, tenkinančios sąlygą:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant p,\overline{p}\leqslant 1} \inf_{k=1,2,\ldots,7} \inf_{a,b\in\mathbf{R}} \rho\big(P_n(p,\overline{p}),\,\Pi_k(a,b)\big)\rho_0^{-1}(n)=1, \tag{1.3}$$

kur ρ yra pilnos variacijos metrika, o parametrinė matų šeima $\{\Pi_k(a,b),\ k=1,2,\ldots,7\}$, sudaryta iš visų galimų atitinkamai normuotos ir centruotos sumos ξ_n ribinių skirstinių, diskretizuotų tolydžiais atvejais.

Šiame straipsnyje tiriamas statistikos ξ_n skirstinio aproksimavimas vienu iš matų šeimos skirstiniu $\Pi_2(a,b)$, kurio charakteristinė funkcija yra

$$h(t|a)\mathrm{e}^{b(h(t|a)-1)}. \tag{1.4}$$

Čia $h(t|a)=\frac{a\mathrm{e}^{it}}{1-(1-a)\mathrm{e}^{it}}$ – geometrinio skirstinio charakteristinė funkcija ir $1\geqslant a>0$.

Skirstinys $\Pi_2(a,b)$ yra ribiniu sumai ξ_n, esant sąlygoms: $n\overline{q}\to b\leqslant\infty$, $q\to a>0$.

2. Rezultatai

1 TEOREMA. *Jeigu $\overline{q}=\mathrm{o}(q)$ ir $(n\overline{q})^{-1}=\mathrm{o}(1)$, kai $n\to\infty$, tai*

$$\inf_{a,b>0}\rho\big(P_n(p,\overline{p}),\,\Pi_2(a,b)\big)=\frac{4ln2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\overline{q}}{\sqrt{n\overline{q}}}\big(1+\mathrm{o}(1)\big), \tag{2.1}$$

ir parametrus a ir b reikia parinkti taip:

$$\begin{cases} b=n\overline{q}(1+\beta), & \beta=\alpha+\frac{1+p-ln4}{nq}(1+\mathrm{o}(1));\\ a=(q+\overline{q})(1+\alpha), & \alpha=\frac{\overline{q}}{q}\Big(1-0,5q-\frac{\overline{q}}{q+\overline{q}}\Big)(1+\mathrm{o}(1)). \end{cases} \tag{2.2}$$

3. Metodika

Atsižvelgdami į tai, kad pilnas 1 teoremos įrodymas daug kartų viršytų apribojimus straipsnio apimčiai, pateiksime įrodymo metodo aprašymą.

Norint tiksliai vertinti atstumą tarp matų pagal variaciją, esminiu yra lokalinių tikimybių užsirašymas patogia išraiška. Paprasčiausia tikimybių $P_n(p,\overline{p})$ formulė yra labai griozdiška:

$$\begin{aligned} P_{n+2}(m+1)=&\sum_{k=1}^{n_1} C_m^k C_{n-m}^k p^{m-k}q^{k+1}\overline{p}^{n-m-k}\overline{q}^k\\ &+\sum_{k=0}^{n_2} C_m^k C_{n-m}^{k-1} p^{m-k}q^k\overline{p}^{n-m-k+1}\overline{q}^k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kur $n_1=\min\{m;n-m\}$, $n_2=\min\{m;n-m+1\}$.

A. Bikelis pasiūlė elegantišką formulę, kurios paprastesnė forma naudojama [3]:

$$P_{n+2}(m+1) = \begin{cases} \frac{n+1}{(2\pi)^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_0(t) g_0^n(t,\theta,\alpha) \mathrm{e}^{-i\theta m}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\alpha, & \text{kai } 0 \leqslant m \leqslant n; \\ p^{n+1}, & \text{kai } m = n+1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Čia

$$w_0(t) = q + \overline{q}\mathrm{e}^{it};$$
$$g_0(t,\theta,\alpha) = \alpha \mathrm{e}^{i\theta}(p + q\mathrm{e}^{-it}) + (1-\alpha)(\overline{p} + \overline{q}\mathrm{e}^{it}).$$

Pasirodo, kad ir aproksimuojančių matų (išskyrus vieną iš jų – diskretizuotą normalųjį, t.y., kai $j = 2, 3, \dots, 7$) lokalias reikšmes galima užrašyti analogiška formule:

$$\Pi_{n+2}^{(j)}\big(m+1|a_n, b_n\big) = \begin{cases} \frac{n+1}{(2\pi)^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_j(t) g_j^n(t,\theta,\alpha) \mathrm{e}^{-i\theta m}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\theta d\alpha, & \text{kai } 0 \leqslant m \leqslant n; \\ \Pi_{n+2}^{(j)}\big(n+1|a_n, b_n\big), & \text{kai } m = n+1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Straipsnyje nagrinėjamu atveju ($j = 2$) turime:

$$w_2(t) = a_n,$$
$$g_2(t,\theta,\alpha) = \alpha \mathrm{e}^{i\theta} g_{21}(t) + (1-\alpha) g_{22}(t),$$
$$g_{21}(t) = \big(1 - a_n + a_n \mathrm{e}^{-it}\big)\mathrm{e}^{\frac{1}{n} b_n (\mathrm{e}^{it}-1)},$$
$$g_{22}(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n} b_n (\mathrm{e}^{it}-1)}.$$

Pastebėsime, kad visais atvejais po trigubu integralu turime n-tuosius charakteristinių funkcijų laipsnius. Tai įgalina panaudoti Bergstremo tipo [2] asimpotinius skleidinius (kai $j, k = 2, 3, \dots, 7,\ j = 0$):

$$P_{n+2}^{(j)}(m+1) - \Pi_{n+2}^{(k)}(m+1) = \widetilde{Q}_{jk}^{(1)}(m) + \widetilde{Q}_{jk}^{(2)}(m) + \dots + \widetilde{Q}_{jk}^{(s)}(m) + \widetilde{R}_{jk}^{(s+1)}(m), \tag{3.4}$$

čia

$$\widetilde{Q}_{jk}^{(l)}(m) = \frac{n+1}{(2\pi)^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\Delta}_{jk}^{(l)}(t,\theta,\alpha) \mathrm{e}^{-i\theta m}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\alpha,$$
$$\widetilde{R}_{jk}^{(s+1)}(m) = \frac{n+1}{(2\pi)^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{r}_{jk}^{(s+1)}(t,\theta,\alpha) \mathrm{e}^{-i\theta m}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\alpha,$$
$$\widetilde{\Delta}_{jk}^{(l)}(\cdot) = w_k(\cdot)\Delta_{jk}^{(l)}(\cdot) + \big(w_j(\cdot) - w_k(\cdot)\big)\Delta_{jk}^{(l-1)}(\cdot),$$
$$\widetilde{r}_{jk}^{(s+1)}(\cdot) = w_k(\cdot) r_{jk}^{(s+1)}(\cdot) + \big(w_j(\cdot) - w_k(\cdot)\big)\Delta_{jk}^{(s)}(\cdot),$$

$$\Delta_{jk}^{(l)}(\cdot) = C_n^l \big(g_j(\cdot) - g_k(\cdot)\big)^l g_k^{n-k}(\cdot),$$

$$r_{jk}^{(s+1)}(\cdot) = \sum_{\mu=s+1}^{n} C_{\mu-1}^{s} g_j^{n-\mu}(\cdot) g_k^{\mu-(s+1)}(\cdot)\big(g_j(\cdot) - g_k(\cdot)\big)^{s+1}.$$

Įvertinus skleidinio (3.4) narius, pradedant antruoju, ir liekamąjį narį (pvz., standartiniu Helderio nelygybės ir Parsevalio lygybės kombinavimo metodu), tenka tirti pirmojo nario asimptotinį elgesį. Tai susiveda į integralų

$$A_l(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{it} - 1)^l \nu(t)\mathrm{e}^{-itm}\,\mathrm{d}t, \quad l = 0, 1, 2, 3, \tag{3.5}$$

asimptotikos tyrimą, kai $\sigma \to \infty$. Čia $\nu(t)$ yra sveikaskaitinio gardelinio su maksimaliu žingsniu 1 mato Furje transformacija, o σ yra standartinis nuokrypis.

Nagrinėjant pilnos variacijos metriką, tenka sumuoti tokių integralų tiesines kombinacijas absoliutiniu dydžiu pagal m:

$$\sum_m \left|\sum_{l=0}^{3} d_l(p, \overline{p}, a, b) A_l(m)\right|, \tag{3.6}$$

čia $d_l(\cdot)$ yra nuo m nepriklausančios išraiškos.

Būtent dėl sumavimo pagal m, integralų asimpotikos liekamojo nario įvertinimų reikia netolygioje formoje. Šiam tikslui užtenka perrašyti tiriamam atvejui reikiamas Centrinės ribinės problemos lokalinių asimptotinių skleidinių su netolygiu lieamuoju nariu teoremas. Gautos išvados atrodo taip:

1 TEIGINYS. *Visiems $l = 1, 2, 3$ teisinga lygybė*

$$\sigma A_l(m) = \sigma^{-l}\varphi(x_m)H_l(x_m) + r_l(x_m), \tag{3.7}$$

ir egzistuoja konstantos $c_1(l)$ tokios, kad visiems x_m teisingos nelygybės

$$\big|r_l(x_m)\big|\big(1 + |x_m|^{l+2}\big) \leqslant c_1(l)\big(\Delta^{-1} + \sigma^{-1}\big)^{l+1}. \tag{3.8}$$

Naudoti įprastiniai žymėjimai: $\varphi(x)$ – standartinis Gauso tankis, $H_l(x)$ – l-tasis Ermito polinomas, o $x_m = (m - \gamma_1)\sigma^{-1}$.

Paskutiniame etape tenka (3.6) išraišką minimizuoti pagal laisvus parametrus a ir b. Pakeitus integralus $A_l(m)$ atsižvelgiant į tapatybes (3.7) ir pritaikius Eulerio–Makloreno sumavimo formulę, pereinama prie atitinkamų integralų minimizavimo. Šiam tikslui yra naudojamas žemiau pateikiamas teiginys.

2 TEIGINYS.

$$\inf_{d_1, d_2 \in R}\int_R \big|H_3(x) + d_2H_2(x) + d_1H_1(x)\big|\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\ln 2}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.9}$$

Literatūra

1. V.V. Anisimov, Daugiamatės ribinės teoremos Markovo grandinėms su baigtiniu būsenų skaičiumi, *Dokl. AN SSSR*, **204**(3) (1972).
2. H. Bergstrem, On asymptotic expansions of probability functions, *Skandinavish Aktuarietidskrift*, **1**, 1–34 (1951).
3. V. Čekanavičius, M. Mikalauskas, Lokalinės teoremos markoviškai binominiam skirstiniui, *Liet. mat. rink.*, **41**(3), 277–293 (2001).
4. R.L. Dobrušin, Ribinės teoremos Markovo grandinėms su dviem būsenomis, *Izv. AN SSSR*, serija mat., **17**, 291–330 (1953).
5. A.A. Iljaščenko, Ribiniai skirstiniai Markovo grandinėms su baigtiniu būsenų skaičiumi, *Ukrain. mat. ž.*, **10** (1958).
6. A.N. Kolmogorov, Kai kurie paskutiniųjų metų darbai tikimybių teorijos ribinių teoremų srityje, *Vestnik MGU*, **10**, 29–38 (1953).
7. L.D. Mešalkin, Ribinės teoremos Markovo grandinėms su baigtiniu būsenų skaičiumi, *Teorija ver. i ee prim.*, **3**(4) (1958).

SUMMARY

M.J. Mikalauskas. Problem of Kolmogorov for Markovian chains

The sums of random variables from two-state Markovian chain in the schemes of series are investigated. The sums are approximated by parametrical set of measures, which is constituted by all possible limit measures of such sums, after making discrete in continuous cases. The problem of Kolmogorov is under solution: the accuracy of approximation by the most relevant measure from parametrical set is evaluated in terms of metrics of variation. The common solution scheme of Kolmogorovæs problem is described and the final results for one particular parametrical measure are presented.

Keywords: Markovian chain, problem of Kolmogorov, asymptotical expansion, metrics of variation.