Kai kurie paprastųjų diferencialinių lygčių su izoliuota ypatuma kraštiniai uždaviniai

Kristina ALDOŠINA, Stasys RUTKAUSKAS (MII, VPU)
el. paštas: krista_212@one.lt, stasysr@ktl.mii.lt

1. Uždavinių formulavimas

Nagrinėsime diferencialinę lygtį

$$l[y] := a(x)y'' + b(x)y' - c(x)y = f(x), \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

kurioje $a \in C^2(0, 1) \cap C^0[0; 1]$, $b \in C^1(0, 1) \cap C^0[0; 1]$, $c \in C^0[0; 1]$, $f \in C^0(0; 1]$ – realiosios funkcijos, be to, $a(0) = 0$ ir $a(x) > 0$ $\forall x \in (0, 1]$, $c(x) > 0$ $\forall x \in (0, 1)$. Taigi (1) lygtis išsigimsta taške $x = 0$, todėl ji gali turėti tiek aprėžtus, tiek ir neaprėžtus šiame taške sprendinius. Tuo atveju, kai taškas $x = 0$ yra (1) lygties integruojama ypatuma, kraštiniai uždaviniai išnagrinėti darbe [1]. Laipsninio tipo ypatumos su bet kuriuo laipsnio rodikliu atveju sprendinių asimptotika ir svorinio tipo kraštiniai uždaviniai išnagrinėti straipsniuosee [2], [3]. Čia nagrinėjamas bendresnis ypatumos atvejis.

Taip pat nagrinėsime ir homogeninę lygtį

$$l[y] = 0. \tag{1_0}$$

Mūsų tikslas – ištirti (1_0) lygties sprendinių asimptotiką, kai $x \to 0$, ir išnagrinėti operatoriaus l kraštinius uždavinius tiek aprėžtų, tiek ir neaprėžtų taške $x = 0$ funkcijų klasėje.

Tegul

$$a^{-1}(x)b(x) = \mu x^{-1} + p(x), \quad \mu = const.$$

Tarsime, kad išpildytos šios (1_0) lygties ypatumą charakterizuojančios sąlygos:

$$a(x) = \mathrm{O}(x^\alpha) \quad (\alpha > 2), \quad a'(x) = \mathrm{o}\big(a^{1/2}(x)\big), \quad x \to 0, \tag{2}$$

$$p, a^{-1/2}(c - c(0)) \in L(0, 1). \tag{3}$$

Pažymėkime $c_0 = c(0)$, $\tau(x) = \sqrt{c_0}\int_x^1 a^{-\frac{1}{2}}(t)\,\mathrm{d}t$ ir apibrėžkime funkciją

$$\psi(x) = x^{\frac{\mu}{2}} a^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\big\{ -\tau(x)\big\}.$$

Nagrinėsime šiuos kraštinius uždavinius: rasti (1) lygties sprendinį $y \in C^2(0,1) \cap C^0(0;1]$, tenkinantį sąlygą

$$y(1) = \gamma_1, \tag{4}$$

ir vieną iš šių sąlygų:

$$|y| < \infty \quad \text{intervale } (0,1), \tag{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \psi(x) y(x) = \gamma_0, \tag{6}$$

kur γ_0, γ_1 – duoti skaičiai.

2. Lygties (1_0) sprendinių asimptotika

Parodysime, kad šios lygties sprendinių asimptotikos pagrindiniai nariai nepriklauso nuo p, o jeigu $\mu = 0$ – ir nuo b.

1 TEOREMA. *Tarkime,* $a^{1/4}(a^{1/4})'' \in L(0,1)$ *ir išpildytos* (2), (3) *sąlygos. Tada egzistuoja tiesiškai nepriklausomi* (1_0) *lygties sprendiniai* y_1, y_2 *tokie, kad*

$$\begin{aligned} y_i(x) &= x^{-\frac{\mu}{2}} a^{\frac{1}{4}}(x) \exp\bigl\{(-1)^i \tau(x)\bigr\}\bigl(1 + \mathrm{o}(1)\bigr), \\ y_i'(x) &= (-1)^{i-1}\sqrt{c_0}\, x^{-\frac{\mu}{2}} a^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\bigl\{(-1)^i \tau(x)\bigr\}\bigl(1 + \mathrm{o}(1)\bigr), \end{aligned} \tag{7}$$

kai $x \to 0$, $i = 1, 2$.

Įrodymas. Šios lygties sprendinių ieškosime pavidalu

$$y(x) = x^{-\frac{\mu}{2}} \exp\bigl\{\zeta(x)\bigr\} u(x), \quad \zeta(x) = \frac{1}{2}\int_x^1 p(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Įstatę (7) išraišką į (1_0), funkcijai u nustatyti gauname lygtį

$$u'' - \bigl(q(x) + c_0 a^{-1}(x)\bigr) u = 0, \tag{9}$$

kurioje

$$q(x) = \bigl(p^2(x) + \mu(\mu - 1)x^{-2}\bigr)/4 + \bigl(p'(x) + \mu x^{-1} p(x)\bigr)/2 + a^{-1}(x)\bigl(c(x) - c_0\bigr).$$

Lengva įsitikinti, kad su (2), (3) sąlygomis teisinga priklausomybė $a^{1/2}q \in L(0,1)$. Kadangi dar $a^{1/4}(a^{1/4})'' \in L(0,1)$, tai (9) lygtis turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius u_1, u_2, kuriems teisingos šios asimptotikos, kai $x \to 0$ [4]:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= a^{\frac{1}{4}}(x) \exp\bigl\{(-1)^i \tau(x)\bigr\}\bigl(1 + \mathrm{o}(1)\bigr), \\ u_i'(x) &= (-1)^{i-1}\sqrt{c_0}\, a^{-\frac{1}{4}}(x) \exp\bigl\{(-1)^i \tau(x)\bigr\}\bigl(1 + \mathrm{o}(1)\bigr), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{10}$$

Sutinkamai su sąlyga $p \in L(0,1)$ gauname, kad $\exp\{\zeta(x)\} = \kappa + \mathrm{o}(1)$, $x \to 0$, kur $\kappa = \exp\{-\zeta(0)\}$. Tada iš (8) išplaukia, kad tiesiškai nepriklausomi (1_0) lygties sprendiniai $y_i = \kappa^{-1} x^{-\mu/2} \exp(\zeta(x)) u_i$, $i = 1, 2$, tenkina (7) asimptotinius sąryšius. Teorema įrodyta.

1 LEMA. *Tarkime, išpildyta* (2) *sąlyga ir* $a' > 0$ *kuriame nors intervale* $(0, x_0) \in (0,1)$. *Tada* $\lim_{x\to 0} a^m(x) \exp(\tau(x)) = +\infty$ *su bet kuriuo realiu skaičiumi* m.

Įrodymas. Tegul kuris nors skaičius $K > |m|$. Sutinkamai su (2) $\exists\ \varepsilon$, $0 < \varepsilon < x_0$ toks, kad teisinga nelygybė $a^{\frac{1}{2}}(x)(a'(x))^{-1} > K\ \forall x \in (0, \varepsilon)$. Tada

$$\tau(x) = \sqrt{c_0} \int_x^1 a^{-\frac{1}{2}}(t)\,\mathrm{d}t = \tau(\varepsilon) + \int_x^{\varepsilon} a^{\frac{1}{2}}(a')^{-1}\,\mathrm{d}\ln a > K_\varepsilon - K \ln a(x)$$

kur $K_\varepsilon = \tau(\varepsilon) + K \ln a(\varepsilon)$. Iš čia, atsižvelgę į nelygybę $m - K < 0$, gauname, kad

$$a^m(x) \exp(\tau(x)) > \exp(K_\varepsilon) a^{m-K}(x) \to +\infty, \quad x \to 0.$$

1 IŠVADA. (1_0) *lygties sprendiniai* y_1, y_2 *tenkina sąlygas*: $y_1(x)$ *ir* $y_1'(x) \to +0$, $y_2(x) \to +\infty$, $y_2'(x) \to -\infty$, *kai* $x \to 0$.

Iš tikrųjų, iš (7) seka, kad $y_1(x)$, $y_2(x)$ ir $y_1'(x) > 0$, o $y_2'(x) < 0$ kurioje nors taško $x = 0$ aplinkoje $(0, x^*)$, $x^* \in (0, 1)$, o iš 1 lemos išplaukia, kad $y_1(x)$ ir $y_1'(x) \to 0$, $y_2(x)$ ir $y_2'(x) \to \infty$, kai $x \to 0$. Taigi išvados teiginys yra teisingas.

2 LEMA. (1_0) *lygties sprendinys* y_1 *– teigiama ir monotoniškai didėjanti intervale* $(0, 1)$ *funkcija.*

Įrodymas. Sutinkamai su sąlyga $c(x) < 0\ \forall x \in (0, 1)$, y_1 intervale $(0, 1)$ negali įgyti nei teigiamo maksimumo, nei neigiamo minimumo. Kadangi šalia to $\lim_{x\to 0} y_1(x) = +0$, tai $y_1(x)$ ir $y_1'(x) > 0\ \forall x \in (0, 1)$, kitaip y_1 intervale $(0, 1)$ įgytų ekstremumą. Taigi y_1 – monotoniška funkcija. Lema įrodyta.

3 LEMA. *Tegul* y – (1_0) *lygties sprendinys, tenkinantis kraštinę sąlygą* $y(1) = 0$ *ir sąlygą* $y(x) = \mathrm{o}(\psi(x))$, $x \to 0$. *Tada* $y(x) \equiv 0$ *intervale* $(0, 1)$.

Įrodymas. Iš (1_0) lygties fundamentaliosios sprendinių sistemos y_1, y_2 (7) asimptotinių savybių ir prielaidos $y(x) = \mathrm{o}(\psi(x))$, $x \to 0$, seka, kad $y(x) = const\ y_1(x)$. Kadangi $y(1) = 0$, $\lim_{x\to 0} y_1(x) = 0$, tai pagal maksimumo principą $y \equiv 0$. Lema įrodyta.

3. Kraštinių uždavinių sprendinių egzistavimas ir vienatis

Pastebėję, kad $y_1(1) \neq 0$ (žr. 2 lemą), sudarykime (1_0) lygties sprendinį $\tilde{y}(x) = y_2(x) - y_1^{-1}(1) y_2(1)) y_1(x)$. Akivaizdu, kad $\tilde{y}(1) = 0$, o iš (7) turime $\tilde{y}(x) \sim y_2(x)$, $x \to 0$. Toliau vietoje $\tilde{y}$ patogumo dėlei rašysime vėl y_2. Taigi nuo šiol laikome, kad y_2 tenkina ne tik (7) asimptotines sąlygas, bet ir sąlygą $y_2(1) = 0$.

Nagrinėkime (1_0) lygties sprendinius

$$y_{01}(x) = \gamma_1 y_1^{-1}(1) y_1(x), \quad y_{02}(x) = y_{01}(x) + \gamma_0 y_2(x). \tag{11}$$

Lengva matyti, kad $y_{0i}(1) = \gamma_1$ $(i = 1, 2)$, $|y_{01}(x)| < \infty$ $\forall x \in (0, 1)$ ir $\lim_{x\to 0} \psi(x) y_{02}(x) = \gamma_0$.

Sudarykime operatoriaus l kraštinių uždavinių (3), (4) ir (3), (5) Grino funkciją

$$G(x,t)=a^{-1}(t)W^{-1}(t)\begin{cases} y_2(x)y_1(t), & 0<t\leqslant x,\\ y_1(x)y_2(t), & x\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

kur $W=y_1y_2'-y_1'y_2$ – Vronskio determinantas. Akivaizdu, kad $G(1,t)=0$ $\forall t\in(0;1]$.

Pastebėkime, kad iš (7) išplaukia asimptotinis sąryšis

$$W(x)=-2\sqrt{c_0}x^{-\mu}\bigl(1+\mathrm{o}(1)\bigr),\quad x\to 0. \tag{12}$$

2 TEOREMA. *Tegul* $Y(x)=\int_0^1 G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$ *ir tegul išpildytos* 1 *teoremos sąlygos. Jeigu* f *aprėžta taške taške* $x=0$*, tai funkcija*

$$y^{(1)}(x)=y_{01}(x)+Y(x) \tag{13}$$

yra (1), (3), (4) *uždavinio sprendinys, o jeigu* f *tenkina sąlygą*

$$a^{-1/2}\psi^{-1}f\in L(0,1), \tag{14}$$

tai egzistuoja (1), (3), (5) *uždavinio sprendinys* $y^{(2)}$ *pavidalo*

$$y^{(2)}(x)=y_{02}(x)+Y(x), \tag{15}$$

kur y_{01},y_{02} – (1_0) *lygties sprendiniai, apibrėžti* (11) *formulėmis. Abu šie atitinkamų kraštinių uždavinių sprendiniai yra vieninteliai.*

Įrodymas. Sutinkamai su Grino funkcijos išraiška Y galima užrašyti pavidalu $Y(x)=y_2(x)J_1(x)+y_1(x)J_2(x)$, kur

$$J_1(x)=\int_0^x\frac{y_1(t)f(t)}{a(t)W(t)}\,\mathrm{d}t,\quad J_2(x)=\int_x^1\frac{y_2(t)f(t)}{a(t)W(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned} &y_1(x)\sim x^{-\mu}a^{1/2}\psi(x),\quad y_1'(x)\sim\sqrt{c_0}x^{-\mu}\psi(x),\\ &y_2(x)\sim\psi^{-1}(x),\quad y_2'(x)\sim-\sqrt{c_0}a^{-1/2}(x)\psi^{-1}(x),\quad x\to 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Iš čia ir iš (12) gauname, kad $y_1(t)a^{-1}(t)W^{-1}(t)\sim a^{-1/2}(t)\psi^{-1}(t)$, $t\to 0$, todėl integralas $J_1(x)$ su (14) sąlyga (juo labiau su funkcijos f aprėžtumo taške $x=0$ sąlyga) konverguoja ir yra tolydi intervale $(0,1]$ funkcija, tenkinanti sąlygą $\lim_{x\to 0}J_1(x)=0$.

Tiesiogiai diferencijuodami gauname, kad $l[y]=f$ intervale $(0,1)$. Be to, lengva matyti, kad $Y(1)=0$. Taigi $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ – (1) lygties sprendiniai, tenkinantys (3) kraštinę sąlygą.

Tegul f aprėžta taške $x=0$. Tada sprendinys Y, vadinasi ir $y^{(1)}$, bus aprėžtas taške $x=0$, jeigu šiame taške aprėžtos funkcijos $I_1(x)=y_1(x)\int_x^1 a^{-1}(t)W^{-1}(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t$ ir

$I_2(x) = y_2(x)\int_0^x a^{-1}(t)W^{-1}(t)y_1(t)\,\mathrm{d}t$. Pasinaudoję Liopitalio taisykle ir atsižvelgę į (12) ir (16) gauname, kad

$$\lim_{x\to 0} I_1(x) = -\lim_{x\to 0}\frac{a^{-1}(x)W^{-1}(x)y_2(x)}{(y_1^{-1}(x))'} = -\frac{1}{2c_0},$$

$$\lim_{x\to 0} I_2(x) = \lim_{x\to 0}\frac{a^{-1}(x)W^{-1}(x)y_2(x)}{(y_2^{-1}(x))'} = -\frac{1}{2c_0}.$$

Taigi (1), (3), (4) uždavinio sprendinys iš tiesų apibrėžiamas (13) formule.

Tarkime, f tenkina (14) sąlygą. Parodysime, kad $\lim_{x\to 0}\psi(x)Y(x) = 0$. Pagal Liopitalio taisyklę, pasirėmę (16) sąryšiais bei sąlyga $a'(x) = \mathrm{o}(a^{1/2}(x))$, $x \to 0$, turime:

$$\lim_{x\to 0}\psi(x)Y(x) = \lim_{x\to 0} J_1(x) + \lim_{x\to 0}\psi(x)y_1(x)J_2(x) = \lim_{x\to 0}\psi(x)y_1(x)J_2(x)$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{a^{-1}(x)W^{-1}(x)y_2(x)f(x)}{(\psi^{-1}(x)y_1^{-1}(x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\psi(x)}.$$

Kadangi $a^{-1/2}\psi^{-1}f \in L(0,1)$, o $a^{1/2}(x) = \mathrm{O}(x^{\alpha/2})$, $x \to 0$, kur $\alpha > 2$, tai $\lim_{x\to 0}\psi^{-1}(x)\psi(x) = 0$.

Tuo būdu parodėme, kad (15) formule apibrėžta funkcja $y^{(2)}$ yra (1), (3), (5) uždavinio sprendinys.

Gauti nagrinėjamų uždavinių sprendiniai $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ yra vieninteliai. Iš tikrųjų, tarę, kad egzistuoja du kurio nors uždavinio sprendiniai, kurių skirtumas yra y, sutinkamai su 3 lema gautume, jog $y \equiv 0$. Teorema įrodyta.

Pastaba. Jeigu $f \in C^0(0;1]$, t.y. jeigu f tolydi kairiajame intervalo $(0,1]$ krašte, tai (1), (3), (4) uždavinio sprendinį $y^{(1)}$ galima tolydžiai pratęsti į tašką $x = 0$ reikšme $-f(0)/c(0)$. Tuo galima įsitikinti perėjus pagal Liopitalio taisyklę prie ribos (13) lygybėje, kai $x \to 0$. Taigi šio sprendinio reikšmė taške $x = 0$ nepriklauso nuo nuo kraštinės sąlygos, formuoluojamos taške $x = 1$.

Literatūra

1. H. Epheser, Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben für gewönlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, **61**(4), 435–454 (1955).
2. I.T. Kiguradze, A.G. Lomtatidze, On certain boundary value problems for second-order linear ordinary differential equations with singularities, *J. Math. Annal. Appl.*, **101**(2), 325–347 (1984).
3. S. Rutkauskas, Weighted boundary problems for a second-order ordinary differential equation with singullarity, *Lithuanian Math. J.*, **26**(4), 367–376 (1986).
4. F. Olver, *Introduction to Asymptotics and Special Functions*, Acad. Press, New York and London (1974).

SUMMARY

K. Aldošina, S. Rutkauskas. On the boundary value problems for ordinary differential equations with isolated singularity

We consider some two-point boundary value problems for second order o.d.e. with strong singularity. The asymptotics of the solutions at the singular point are given. The existence and uniqueness of the solutions of those problems are prooved.

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, singularity, asymptotics.