Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 451–456

Bendrasis vidurkio apibrėžimas

Robertas VILKAS (KTU, MII)
el. paštas: robertas.vilkas@ktu.lt

APIBRĖŽIMAS. Elementų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vidurkiu funkcijos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ atžvilgiu vadinsime elementą m_f, tenkinantį sąlygą

$$f(m_f, m_f, \ldots, m_f) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Pažymėję funkciją $g(x) = f(x, x, \ldots, x)$ iš (1) lygties galime rasti vidurkį:

$$m_f = g^{-1}\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right). \tag{2}$$

Čia g^{-1} gali būti nevienareikšmė, t.y., gali būti ne vienas vidurkis. Žemiau pateiktose teoremose laikoma, kad g^{-1} yra vienareikšmė ir $g^{-1}(g(x)) = x$. Kadangi atvirkštinė funkcija g^{-1} gali neegzistuoti, tai ne bet kokios funkcijos atžvilgiu galime rasti vidurkį.

Lema. *$m_f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tada ir tik tada, kai $f(x, x, \ldots, x) = x$.*

Įrodymas. Jei $m_f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tai remiantis (2) gauname, kad $m_f = g^{-1}(m_f)$, t.y., $g(x) = x$. Jei $g(x) = x$, tai iš (2) gauname, kad $m_f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1 teorema. *Tarkime, kad $m_f = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^{-1}\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$. Tuomet vidurkis m_{f_1} sutaps su vidurkiu m_f (t.y., vidurkis vidurkio atžvilgiu yra tas pats vidurkis).*

Įrodymas. Kadangi $g_1(x) = f_1(x, x, \ldots, x) = g^{-1}(f(x, x, \ldots, x)) = g^{-1}(g(x)) = x$, tai iš lemos išplaukia, kad $m_{f_1} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, t.y., $m_{f_1} = m_f$.

2 teorema. *Vidurkis m_f, atžvilgiu funkcijos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sutampa su vidurkiu $M_{\Psi\circ f}$, atžvilgiu funkcijos $\Psi\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$, kur Ψ yra bet kokia monotoninė funkcija.*

Įrodymas. Pažymėkime $g_m(x) = f(x, x, \ldots, x)$, $g_M(x) = \Psi(f(x, x, \ldots, x)) = \Psi(g_m(x))$. Tuomet $g_M^{-1}(x) = g_m^{-1}(\Psi^{-1}(x))$. Remiantis (2) gauname

$$M_{\Psi\circ f} = g_m^{-1}\left(\Psi^{-1}\left(\Psi\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)\right)\right) = g_m^{-1}\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = m_f.$$

Įdomus yra toks uždavinys. Sakykime, kad turime funkciją $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ar ši funkcija yra vidurkis kokios nors funkcijos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ atžvilgiu? Kaip ją rasti?

Norint rasti funkciją f reikia išspręsti tokią funkcinę lygtį:

$$f\big(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\big) \\ = f(x_1,x_2,\ldots,x_n). \tag{3}$$

3 teorema. *Jei* $f_1(x,x,\ldots,x) = x$, *tai* $m_f = f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, *t.y., tuomet* $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *yra vidurkis kokios nors funkcijos* f *atžvilgiu.*

Įrodymas. Iš lemos išplaukia, kad pakanka pasirinkti $f = f_1$. Iš 2 teoremos išplaukia, kad galime imti ir $f = \Psi(f_1)$.

Iš 3 teoremos įrodymo išplaukia, kad jei $f_1(x,x,\ldots,x) = x$, tai (3) funkcinės lygties vienas iš sprendinių yra toks: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Psi(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n))$. Čia Ψ yra bet kokia funkcija, turinti atvirkštinę (nebūtinai vienareikšmę, nes (3) lygtis yra (1), o ne (2)). Taigi, remiantis bendrųjų vidurkių savybėmis, galime spręsti kai kurias funkcines lygtis!

Pavyzdžiai

1. Aritmetinis vidurkis

Raskime elementų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vidurkį sumos $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ atžvilgiu, t.y., raskime vidutinį dėmenį. Šiuo atveju $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Randame $g(x) = f(x,x,\ldots,x) = n \cdot x$. Atvirkštinė funkcija $g^{-1}(x) = \frac{x}{n}$. Vidurkis $m_f = g^{-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. T.y., gavome, kad vidurkis sumos atžvilgiu yra aritmetinis vidurkis. Remiantis 2 teorema, galime teigti, kad vidurkis funkcijos $\Psi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ atžvilgiu bus tas pats aritmetinis vidurkis ($\Psi-$ bet kokia monotoninė funkcija!).

2. Harmoninis vidurkis

Spręskime tokį praktinį uždavinį. Sakykime, kad turime elektros grandinę, sudarytą iš n lygiagrečiai sujungtų rezistorių, kurių varžos yra $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Tarkime, kad norime pakeisti rezistorius taip, kad jie turėtų vienodą varžą ir kad visos grandinės varža nepasikeistų. Kaip rasti tokio rezistoriaus varžą?

Intuityviai aišku, kad ieškomoji varža bus kažkoks varžų $R_1, R_2, \ldots, R_n$ vidurkis. Tačiau koks? Kadangi lygiagrečiai sujungtų rezistorių atstojamoji varža nėra suma $R_1 + R_2 + \ldots + R_n$, tai tas vidurkis nebus aritmetinis! Visos grandinės varža nepasikeis, jei nepasikeis visos grandinės laidumas. Be to, iš elektrotechnikos žinoma, kad lygiagrečiai sujungtų rezistorių bendras laidumas yra tų rezistorių laidumų suma:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Iš čia aišku kokios funkcijos atžvilgiu reikia ieškoti vidurkį.

$$f(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}, \quad g(x) = \frac{n}{x}, \quad g^{-1}(x) = \frac{n}{x}.$$

Ieškomoji varža:

$$R = \frac{n}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}.$$

Gavome harmoninį vidurkį.

3. Maks-vidurkis

Įdomumo dėlei raskime vidurkį maksimumo atžvilgiu.

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$g(x) = \max(x, x, \ldots, x) = x, \quad g^{-1}(x) = x.$$

Vidurkis $m_f = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4. Vidurkis skirtumo atžvilgiu

Pabandykime rasti dviejų elementų vidurkį jų skirtumo atžvilgiu.

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad g(x) = x - x \equiv 0.$$

Taigi, toks vidurkis neegzistuoja, nes neegzistuoja g^{-1}.

5. Pusiaukampinė

Galima sakyti, kad pusiaukampinė yra tam tikras vidurkis tarp duotų dviejų tiesių. Tarkime, kad duotos dvi tiesės $y = a_1x + b_1$ ir $y = a_2x + b_2$. Raskime pusiaukampinę $y = a_3x + b_3$. Kadangi a_1 ir a_2 yra kampų tangentai, tai patys kampai atitinkamai yra $\arctan a_1$ ir $\arctan a_2$. Ieškome pusiaukampinės (t.y., pusė kampo), vadinasi, turime ieškoti vidurkio kampų sumos (o ne sandaugos ar pan.) atžvilgiu.

$$f(a_1, a_2) = \arctan a_1 + \arctan a_2, \quad g(x) = 2\arctan x, \quad g^{-1}(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Vidutinis koeficientas

$$a_3 = \tan\left(\frac{\arctan a_1 + \arctan a_2}{2}\right).$$

Laisvąjį narį b_3 nesunku rasti iš sąlygos, kad pusiaukampinė turi kirstis tame pačiame taške, kur kertasi duotos dvi tiesės. Šiuo būdu randama tik viena pusiaukampinė. Kitą pusiaukampinę nesunku rasti iš tiesių statmenumo sąlygos. Įdomu pastebėti, kad galime ieškoti vidutinės tiesės ne tik tarp dviejų tiesių. Šią vidutinę tiesę galima būtų vadinti ***vidurkampine***. Tarkime, kad turime n tiesių, susikertančių viename taške. Vidurkampinės koeficientą a galima būtų skaičiuoti taip:

$$a = \tan\left(\frac{\arctan a_1 + \arctan a_2 + \ldots + \arctan a_n}{n}\right).$$

6. Vidurkis, apimantis aritmetinį, geometrinį ir harmoninį vidurkius

Raskime vidurkį, atžvilgiu tokios funkcijos

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k)^r + (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot x_{k+1})^r + \dots + (x_{n-k+1} \cdot \dots \cdot x_n)^r,$$

$$g(x) = C_n^k \cdot x^{k \cdot r}, \quad g^{-1}(x) = \sqrt[k \cdot r]{\frac{x}{C_n^k}},$$

$$m_f = \sqrt[k \cdot r]{\frac{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k)^r + (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot x_{k+1})^r + \dots + (x_{n-k+1} \cdot \dots \cdot x_n)^r}{C_n^k}}.$$

Jei $k = 1, r = 1$, tai gauname *aritmetinį* vidurkį. Jei $k = n$, tai gauname *geometrinį* vidurkį (r susiprastina). Jei $k = 1, r = -1$, tai gauname *harmoninį* vidurkį.

[2] knygoje yra pateiktas vidurkis (apimantis aritmetinį, geometrinį ir harmoninį vidurkius), kuris yra pastarojo vidurkio atskiras atvejis, kai $k = 1$. Tačiau ten geometrinis vidurkis gaunamas ne iš karto, o perėjus prie ribos, kai $r \to 0$. Todėl ten įvestas apribojimas, kad elementai būtų teigiami.

Vidurkis funkcionalo atžvilgiu

Čia nagrinėsime bendresnius vidurkius už aukščiau nagrinėtus vidurkius. Pažymėkime funkcijos $x(t)$ funkcionalą $f(x) = f(x(t)\colon t \in T)$. Jei $T = \{1, 2, \dots, n\}$, tai $f(x) = f(x(1), x(2), \dots, x(n)) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Čia pažymėjome $x(k) = x_k$. Taigi, aukščiau pateiktas vidurkis yra tik atskiras atvejis, kai aibė $T = \{1, 2, \dots, n\}$.

APIBRĖŽIMAS. Funkcijos $x(t)$ vidurkiu aibėje T funkcionalo $f(x(t)\colon t \in T)$ atžvilgiu vadinsime elementą m_f, tenkinantį sąlygą

$$f(m_f\colon t \in T) = f\big(x(t)\colon t \in T\big). \tag{4}$$

Pažymėję funkciją $g(x) = f(x\colon t \in T)$(čia x nepriklauso nuo t) iš (4) lygties galime rasti vidurkį:

$$m_f = g^{-1}\left(f\big(x(t)\colon t \in T\big)\right). \tag{5}$$

Pastebėsime, kad (4) ir (5) lygybės yra analogiškos (1) ir (2) lygybėms atitinkamai. Nesunku įsitikinti, kad lema ir visos teoremos išlieka teisingos ir vidurkiui atžvilgiu funkcionalo.

Pavyzdžiai

1. Funkcijos vidutinė reikšmė intervale (kaip aritmetinio vidurkio analogas)

Kadangi integralas yra „tolydi suma“, tai gausime aritmetinio vidurkio analogą. Raskime vidurkį funkcionalo $f(x) = \int_a^b x(t)dt$ atžvilgiu. $g(x) = \int_a^b x\mathrm{d}t = x\int_a^b \mathrm{d}t = x(b-a)$, $g^{-1}(x) = \frac{x}{b-a}$, $m_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$.

2. Funkcijos vidutinė reikšmė intervale (kaip geometrinio vidurkio analogas)

Kas galėtų būti „tolydi sandauga“? Pažiūrėkime kaip sandauga užrašoma per sumą diskrečiuoju atveju:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = \exp\left(\ln\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(x_j)\right).$$

Iš čia aišku, kaip gauti „tolydžią sandaugą“. Ieškome vidurkio funkcionalo $f(x) = \exp\left(\int_a^b \ln(x(t))\,\mathrm{d}t\right)$ atžvilgiu.

$$g(x) = \exp\left(\ln(x)\int_a^b \mathrm{d}t\right) = x^{b-a},$$

$$g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{b-a}}, \quad m_f = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(x(t))\,\mathrm{d}t\right).$$

1 ir 2 pavyzdžiuose gauti vidurkiai sutampa su vidurkiais pateiktais [2] knygoje.

3. Vienas iš bendresnių vidurkių

Raskime vidurkį funkcionalo $f(x) = \int_a^b p(t)\varphi(x(t))\,\mathrm{d}t$ atžvilgiu.

$$g(x) = \int_a^b p(t)\varphi(x)\,\mathrm{d}t = \varphi(x)\int_a^b p(t)\mathrm{d}t,$$

$$g^{-1}(x) = \varphi^{-1}\left(x\cdot\left(\int_a^b p(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}\right),$$

$$m_f = \varphi^{-1}\left(\int_a^b p(t)\varphi(x(t))\,\mathrm{d}t\cdot\left(\int_a^b p(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}\right).$$

Įdomu tai, kad 3 pavyzdyje gautas vidurkis šiek tiek skiriasi nuo vidurkio, pateikto matematinėje enciklopedijoje [1]. Ten (161 psl.) pateiktas toks vidurkis:

$$m_f = \varphi^{-1}\left(\int_a^b p(t)\varphi(x(t))\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_a^b p(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

Pastarasis vidurkis iš tikrųjų nėra tikrasis vidurkis, nes čia konstantos vidurkis, bendru atveju, nebus ta pati konstanta! Pvz., jei $x(t) \equiv c$, tai gautume, jog bendru atveju

$$m_f = \varphi^{-1}\left(\varphi(c)\int_a^b p(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_a^b p(t)\mathrm{d}t\right)^{-1} \neq c, \quad \text{jei} \int_a^b p(t)\mathrm{d}t \neq 1.$$

Trečiame pavyzdyje gautas vidurkis apima funkcijos aritmetinį, harmoninį ir geometrinį vidurkius. Tarkime, kad $p(t) = \begin{cases} c, & \text{kai } t \in [a,b] \\ 0, & \text{kai } t \notin [a,b] \end{cases}$. Čia $c \neq 0$ ir nebūtinai $c = \frac{1}{b-a}$. Jei $\varphi(x) = x^r$, tai gauname aritmetinį vidurkį, kai $r = 1$ (žr. 1 pavyzdį), ir gauname harmoninį vidurkį, kai $r = -1$. Jei $\varphi(x) = \ln x$, tai gausime geometrinį vidurkį (žr. 2 pavyzdį).

Literatūra

[1] *Математическая энциклопедия*, гл. ред. И.М. Виноградов, т. 5, Советская энциклопедия, М. (1984).

[2] Г. Полиа, Г.Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, т. 1, Наука, М. (1973).

[3] Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, М. (1948).

General definition of mean

R. Vilkas

In this article there is presented general definition for mean. Also many interesting examples are given.