Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 620–625

Atsitiktinių dydžių sumos serijų schemoje tankio funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių Kramerio zonoje

Dovilė DELTUVIENĖ, Leonas SAULIS (VGTU, MII)
el. paštas: lsaulis@fm.vtu.lt

Darbas skirtas nepriklausomų atsitiktinių dydžių (at.d.) $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ su vidurkiais $\mathbf{E}\,\xi_j^{(n)} = 0$, ir dispersijomis $\sigma_j^{(n)^2} = \mathbf{E}\,\xi_j^{(n)^2}$ serijų schemoje sumos tankio funkcijos asimptotinio skleidinio gavimui didžiųjų nuokrypių Kramerio zonoje. Šis rezultatas gautas remiantis bendrąja lema 6.1 [2], apjungiant charakteristinių funkcijų ir kumuliantų metodus. Darbas praplečia at.d. sumavimo teoriją [1] ir atskiru atveju pagerina at.d. sumavimo su svoriais žinomus S.A. Book [5] rezultatus.

Pažymėkime

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}, \qquad Z_n = \frac{S_n}{B_n}, \qquad B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{(n)^2}, \tag{1.1}$$

$$F_n(x) := \mathbf{P}(Z_n < x), \qquad p_n(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_n(x), \qquad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}. \tag{1.2}$$

Bet kurio at.d. ξ charakteristinę funkciją (ch.f.) ir k-tosios eilės kumuliantą atitinkamai pažymėsime:

$$f_\xi(t) := \mathbf{E}\, e^{it\xi}, \quad \Gamma_k(\xi) := \frac{\mathrm{d}^k}{i^k\,\mathrm{d}t^k} \ln f_\xi(t)\Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Tegul at.d. $\xi_j^{(n)}$ tenkina S. Bernšteino sąlygą: $\exists$ dydis $K_j^{(n)} > 0$, toks kad

$$\left|\mathbf{E}\,\xi_j^{(n)^k}\right| \leqslant k!\left(K_j^{(n)}\right)^{k-2} \sigma_j^{(n)^2}, \quad k = 3, 4, \ldots. \tag{B}$$

Teiginys. *Jei at.d.* $\xi_j^{(n)}$ *tenkina sąlygą* (B), *tai at.d.* Z_n, *k-osios eilės kumuliantui* $\Gamma_k(Z_n)$ *galioja įvertis*

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant \frac{k!}{\Delta_n^{*\,k-2}}, \quad k = 3, 4, \ldots, \tag{1.4}$$

kur

$$\Delta_n^* = B_n/K_n, \quad K_n := 2 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \big(K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)}\big), \tag{1.5}$$

$a \vee b = \max\{a, b\}$. *Be to, reikalausime, kad* $\Delta_n^* \to \infty$, *kai* $n \to \infty$.

Įrodymas Pastebėsime, kad $\mathrm{E}\, Z_n = 0$, ir $\mathrm{D} Z_n = 1$. Atsižvelgę į tai, kad at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ yra nepriklausomi, gauname

$$f_{Z_n}(t) = f_{S_n}(t/B_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j^{(n)}}(t/B_n). \tag{1.6}$$

Remiantis at.d. ξ, k-osios eilės kumulianto apibrėžimu (1.3) ir lygybe (1.6), nesunku įsitikinti, kad

$$\Gamma_k(Z_n) = \Gamma_k(S_n)/B_n^k, \qquad \Gamma_k(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_k\big(\xi_j^{(n)}\big). \tag{1.7}$$

Dabar, pasinaudoję sąlyga (B) ir remdamiesi lema 3.1 [2], gauname

$$\big|\Gamma_k\big(\xi_j^{(n)}\big)\big| \leqslant k!\Big(2\big(K_j^{(n)} \vee \sigma_j^{(n)}\big)\Big)^{k-2} \sigma_j^{(n)^2}. \tag{1.8}$$

Tuomet $|\Gamma_k(S_n)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\Gamma_k(\xi_j^{(n)})| \leqslant k!(K_n)^{k-2} B_n^2$, $k = 3, 4, \dots$, kur K_n apibrėžtas lygybe (1.5). Prisiminę, lygybę (1.7), ir gauname įvertį (1.4).

Pažymėkime:

$$\Delta_n = c_0 \Delta_n^*, \quad c_0 = (1/6)\big(\sqrt{2}/6\big), \quad R_n = (1/12)(1 - x/\Delta_n)\Delta_n. \tag{1.9}$$

Toliau reikalausime, kad egzistuotų at.d. $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots$, tankiai $p_{\xi_j^{(n)}}(x)$, kurie tenkina sąlygą

$$\sup_x p_{\xi_j^{(n)}}(x) \leqslant C_j^{(n)} < \infty, \quad j = 1, 2, \dots. \tag{D}$$

Teorema. *Tegul serijų seka* $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ *su vidurkiais* $\mathrm{E}\, \xi_j^{(n)} = 0$ *ir dispersijomis* $\mathrm{D}\xi_j^{(n)} = \mathrm{E}\, \xi_j^{(n)^2}$ *tenkina sąlygas* (B), (D). *Tada kiekvienam sveikajam* l, $l \geqslant 1$ *Kramerio zonoje* $0 \leqslant x < \Delta_n$, *kur* Δ_n *apibrėžtas lygybe* (1.9), *galioja lygybė*

$$\frac{p_{Z_n}(x)}{\phi(x)} = \exp\{L_n(x)\}\bigg(1 + \sum_{\gamma=0}^{l-1} M_{\gamma,n}(x) + \theta_1 q(l)\big((x+1)/\Delta_n\big)^l + \frac{C_1 K_n}{\Delta_n} \max_{1 \leqslant r_i \leqslant n} \prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{(n)^{1/4}} \exp\bigg\{ - \frac{c_3}{K_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k^{(n)^2}} \bigg\}\bigg). \tag{1.10}$$

Čia $c_3 > 0$ ir $L_n(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \lambda_{k,n} x^k$, kur koeficientai $\lambda_{k,n}$ išreiškiami formule $\lambda_{k,n} = -b_{k-1,n}/k$, be to koeficientus $b_{k,n}$ galima rasti iš lygybių

$$b_{j,n}^{(1)} = \sum_{r=1}^{j} \Gamma_{r+1}(Z_n) \frac{1}{r!} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_r=j \\ j_i \geqslant 1}} \prod_{i=1}^{r} b_{j_i,n} = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ 0, & j = 2, 3, \ldots . \end{cases}$$

Koeficientams $\lambda_{k,n}$ galioja įvertis $|\lambda_{k,n}| \leqslant (2/k)(16/\Delta_n)^{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$. Atskiru atveju:

$$\lambda_{3,n} = \frac{1}{3}\Gamma_3(Z_n), \quad \lambda_{4,n} = \frac{1}{24}(\Gamma_4(Z_n) - 3\Gamma_3^2(Z_n)),$$
$$\lambda_{5,n} = \frac{1}{120}(\Gamma_5(Z_n) - 10\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) + 15\Gamma_3^2(Z_n)), \ldots .$$

Daugianariams $M_{\gamma,n}(x)$ galioja lygybė

$$M_{\gamma,n}(x) = \sum_{k=0}^{\gamma} K_{k,n}(x) q_{\gamma-k,n}(x),$$
$$K_{\gamma,n}(x) = \sum \prod_{m=1}^{\gamma} \frac{1}{k_m!}\big(- \lambda_{m+2,n} x^{m+2}\big)^{k_m}, \quad K_0(x) \equiv 1,$$
$$q_{\gamma,n}(x) = \sum H_{\gamma+2l}(x) \prod_{m=1}^{\gamma} \frac{1}{k_m!}\big(\Gamma_{m+2}(Z_n)/(m+2)!\big)^{k_m}; \quad q_0(x) \equiv 1, \tag{1.11}$$

kur $\sum$ reiškia sumavimą pagal visus sveikuosius lygties $k_1 + 2k_2 + \cdots + \nu k_\nu = \nu$ sprendinius. Čia $H_m(x)$ – m-tos eilės Čebyševo-Ermito polinomai. Daugianarių $M_{\gamma,n}(x)$ koeficientai išreiškiami per at.d. Z_n kumuliantus. Atskiru atveju:

$$M_0(x) \equiv 0, \quad M_{1,n}(x) = -\frac{1}{2}\Gamma_3(Z_n),$$
$$M_{2,n}(x) = \frac{1}{8}(5\Gamma_3^2(Z_n) - 2\Gamma_4(Z_n))x^2 + \frac{1}{24}(3\Gamma_4(Z_n) - 5\Gamma_3^2(Z_n)),$$
$$M_{3,n}(x) = \frac{1}{48}(34\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) - 4\Gamma_5(Z_n) - 45\Gamma_3^3(Z_n))x^3$$
$$+ \frac{1}{48}(6\Gamma_5(Z_n) - 35\Gamma_3(Z_n)\Gamma_4(Z_n) + 35\Gamma_3^2(Z_n))x, \ldots .$$

Teoremos įrodymas. Tegul $\xi_j^{(n)}(h)$ yra at.d. $\xi_j^{(n)}$ sujungtinis at.d. su tankio funkcija

$$p_{\xi_j^{(n)}(h)}(x) := \mathrm{e}^{hx} p_{\xi_j^{(n)}}(x) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{hx} p_{\xi_j^{(n)}}(x)\,\mathrm{d}x \Big)^{-1}. \tag{1.12}$$

Nesunku įsitikinti, kad

$$\mathbf{E}\,\xi_j^{(n)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\Gamma_k\big(\xi_j^{(n)}\big)h^{k-1}, \tag{1.13}$$

$$\sigma_j^{(n)^2}(h) = \mathbf{D}\xi_j^{(n)}(h) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!}\Gamma_k\big(\xi_j^{(n)}\big)h^{k-2}, \tag{1.14}$$

ir k-tosios eilės kumuliantas

$$\Gamma_k\big(\xi_j^{(n)}(h)\big) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{(l-k)!}\Gamma_l\big(\xi_j^{(n)}\big)h^{l-k}, \quad k = 3, \ldots. \tag{1.15}$$

Tegul

$$S_n(h) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}(h),\ Z_n(h) = (S_n(h) - M_n(h))/B_n(h),$$

$$L_{k,n}(h) := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left|\xi_j^{(n)}(h) - \mathbf{E}\,\xi_j^{(n)}(h)\right|^k \Big/ B_n^k(h),$$

kur $M_n(h) = \mathbf{E}\,S_n(h) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,\xi_j^{(n)}(h)$, $B_n^2(h) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{(n)^2}(h)$, ir dydis h randamas iš lygybės $x = M_n(h)/B_n$.

Pasinaudojus bendrąją lema 6.1 [2] bet kokiam at.d. ξ, teoremos įrodymui reikia įvertinti integralą

$$I = \int\limits_{|t|\geqslant R_n} |f_{Z_n(h)}(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{1.16}$$

kur R_n apibrėžtas lygybe (1.9).

Remiantis lema 6.5 [2], turime $|f_{Z_n(h)}(t)| \leqslant \exp\big\{-I_{h,n}(t/2\pi)\big\}$,

$$\begin{aligned}
I_{h,n}(t/2\pi) &= \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\pi t x) p_{\bar{\xi}_j^{(n)}(h)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant 4t^2 \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x|\leqslant 1/2|t|} x^2 p_{\bar{\xi}_j(h)}(x)\,\mathrm{d}x = 4t^2 B_n^2(h) l_n\big(1/2|t|\big), \\
l_n\big(N_n(h)\big) &= B_n^{-2}(h) \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\mathrm{d}F_{\bar{\xi}_j^{(n)}(h)}(x) - 2 \int\limits_{N_n(h)}^{\infty} x^2\,\mathrm{d}F_{\bar{\xi}_j^{(n)}(h)}(x) \Bigg) \\
&= 2\Bigg(1 - \frac{1}{B_n^2(h)} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{N_n(h)}^{\infty} x^2\,\mathrm{d}F_{\bar{\xi}_j^{(n)}(h)}(x)\Bigg) \\
&= 2\big(1 - B_n^2(h)/N_n^2(h) L_{4,n}(h)\big).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Žinant, kad $\mathbf{E}\left(\xi_j^{(n)}(h) - \mathbf{E}\xi_j^{(n)}(h)\right)^4 = \Gamma_4(\xi_j^{(n)}) + 3\sigma_j^{(n)^4}(n)$, randame

$$L_{4,n}(h) \leqslant \frac{\Gamma_4\left(S_n(h)\right)}{B_n^4(h)} + 3 \max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{\sigma_j^{(n)^2}(h)}{B_n^2(h)}. \tag{1.18}$$

Toliau remiantis lygybe (1.14), kai $0 \leqslant h \leqslant \Delta_n/12B_n = 1/12K_n$, gauname

$$\sigma_j^{(n)^2}(h) = \sigma_j^{(n)^2}\left(1 + \theta\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{hB_n}{\Delta_n}\right)^{k-2}\right) = \sigma_j^2\left(1+\theta(5/8)\right).$$

Remiantis lygybe (1.18) nesunku įsitikinti, kad

$$\left|\Gamma_4\left(S_n(h)\right)/B_n^4(h)\right| \leqslant 18,2(B_n/\Delta_n)^2/B_n^2(h). \tag{1.19}$$

Atsižvelgę į nelygybę (1.18), gauname $L_{4,n}(h)B_n^2(h) \leqslant 18{,}2(B_n/\Delta_n)^2$.

Tegul $N_n(h) = 6,2(B_n/\Delta_n)$. Parinkus tokį $N_n(h)$, ir remiantis lygybe (1.15), gauname $l_n(N_n(h)) \geqslant 1$. Tuomet

$$\left|f_{Z_n(h)}(t)\right| \leqslant \exp\{-t^2/\pi^2\}, \quad |t| \leqslant T_n, \ T_n = \pi B_n(h)\Delta_n/(6{,}2B_n). \tag{1.20}$$

Dabar integralą I, apibrėžtą lygybe (1.16), suskaidome į du integralus: $I = I_1 + I_2$,

$$I_1 = \int\limits_{R_n\leqslant|t|\leqslant T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|\mathrm{d}t, \quad I_2 = \int\limits_{|t|\geqslant T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|\mathrm{d}t.$$

Iš (1.20) gauname

$$I_1 = \int\limits_{R_n\leqslant|t|\leqslant T_n} |f_{Z_n(h)}(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\pi^2/2R_n\right)\exp\{-R_n^2/\pi^2\}. \tag{1.21}$$

Remiantis lema 6.6 [2], randame integralo I_2 įvertį

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{T_n\leqslant|t|<\infty} \left|f_{Z_n(h)}(t)\right|\mathrm{d}t = 2\pi B_n(h) \int\limits_{(2N_n(h))^{-1}\leqslant|t|<\infty} \left|f_{S_n(h)}(2\pi t)\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\pi \mathrm{e}^4\sqrt{2\pi}\exp\left\{-\frac{c_3}{K_n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j^{(n)^2}}\right\}U_n(h), \end{aligned} \tag{1.22}$$

$c_3 > 0$, ir $U_n(h)$, remiantis Koši nelygybe, yra

$$\begin{aligned} U_n(h) &= \sum_k \sup_{t_k^{(n)}<t<t_{k+1}^{(n)}} \left|f_{S_n(h)}(2\pi t)\right| \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{4}\left(\sum_k \sup_{t_k^{(n)}<t<t_{k+1}^{(n)}} \left|f_{\xi_j^{(n)}(h)}(2\pi t)\right|^4\right)^{1/4} \leqslant 172K_n\prod_{i=1}^{4} C_i^{(n)^{1/4}}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Iš nelygybių (1.22) ir (1.23), gauname

$$I_2 = \int\limits_{T_n \leqslant |t| < \infty} \left| f_{Z_n(h)}(t) \right| \mathrm{d}t$$
$$\leqslant 684 \mathrm{e}^4 \pi \sqrt{2\pi} K_n \max_{1 \leqslant r_i \leqslant n} \prod_{i=1}^{4} C_{r_i}^{(n)^{1/4}} \exp\left\{ -\frac{c_3}{K_n^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j^{(n)^2}} \right\}. \tag{1.24}$$

Remiantis nelygybėmis (1.21) ir (1.24), ir gauname teoremos tvirtinimą.

Pavyzdys. Tegul $\xi_j^{(n)} = a_{nj}\xi_j$, kur a_{nj} – teigiami dydžiai, o ξ_j – nevienodai pasiskirstę, nepriklausomi at.d. su vidurkiais $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$ ir dispersijomis $\sigma_j^2 = \mathbf{E}\,\xi_j^2$, $j = \overline{1,n}$. Pažymėkime $Z_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\xi_j / B_n$, kur $B_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 \sigma_j^2$. Tegul at.d. ξ_j tenkina apibendrintą Bernšteino sąlygą: egzistuoja dydis $K > 0$ toks, kad $|\mathbf{E}\,\xi_j^k| \leqslant k!\,K^{k-2}\sigma_j^2$, $k = 3, 4, \ldots$. Be to reikalausime, kad $p_{\xi_j}(x) < C_j$. Šiuo atveju sąlygoje (B) $K_j^{(n)} = a_{nj}K$, $\sigma_j^{(n)} = a_{nj}\sigma_j$. Tuomet gautume, kad lygybe (1.5) apibrėžtas dydis $K_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n}(2a_{nj}\{K \vee \sigma_j\})$ ir $C_j^{(n)} = C_j / a_{nj}$.

Literatūra

[1] L. Saulis, Asymptotic expansions of large deviations for sums of nonidentically distributed random variables, *Acta Appl. Math.*, **58**, 291–310 (1999).

[2] L. Saulis, V. Statulevičius, *Didžiųjų nuokrypių ribinės teoremos*, Mokslas, Vilnius (1989) (rusų k.).

[3] L. Saulis, Atsitiktinio dydžio su reguliariu semiinvariantų elgesiu pasiskirstymo funkcijos asimptotinis skleidinys didžiųjų nuokrypių zonose, *Lietuvos matematikos rinkinys*, **36**(3), TEV, Vilnius, 365–392 (1996).

[4] В.А. Статулявичус, Пределные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, *Теория вероятностей и ее применения*, **4**, 645–659 (1965).

[5] S.A. Book, A large deviation theorem, *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, **26**, 43–49 (1973).

Asymptotic expansion for the density function of the series scheme of a random variables in the large deviation in Cramer zone

D. Deltuvienė, L. Saulis

In this work, the expansion of the density function of series schemes of independent variables $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_j^{(n)}$, with means $\mathbf{E}\,\xi_j^{(n)} = 0$, and dispersions $\sigma_j^{(n)^2} = \mathbf{E}\,\xi_j^{(n)^2}$ has been obtained in the Cramer zone of large deviations. The result was obtained, based on General Lemma 6.1 [2] by joining the methods of characteristic functions and cumulants. The work broadens theory of sums of random variables [1] and in special case improves S.A. Book [5] results of sums of random variables with weights