LMD konf. darbai, 304–308
1997, Vilnius

Об одной тригонометрической системе

А. Лауринчикас (ВУ), П. Прокопович (Кошице)

Рассматривается тригонометрическая система, состоящая из 6 звеньев, которые совершают вращательные движения на углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ соответственно. Длины звеньев $l_1, \ldots, l_6$. Вращение на угол α_1 происходит на плоскости xy около оси z, вращения на углы α_2, α_3 и α_4 происходят около оси, паралельной плоскости xy, вращение на угол α_5, происходит около оси, паралельной оси z, и наконец, вращение на угол α_6 происходит около оси, перпендикулярной оси вращения угла α_4. Считаем, что ось z вертикальна. Кроме того, предполагаем, что $\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0, l_2 = l_3$, и что начало звена l_1 совпадает с началом базовой системы координат.

Пусть имеем точку в пространстве (x, y, z), достижимую концом 6-ого звена. Задача состоит в отыскании углов $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ таких, чтобы конец 6-ого звена находился в точке (x, y, z). Очевидно, все углы выразить через x, y, z невозможно, так как их всего 6, а мы можем получить систему только из трех уравнений. Отметим, что рассматриваемая задача встречается в машиностроении при изучении манипуляционных систем.

Для решения поставленной задачи применим матричный метод. С каждым звеном свяжем определенную систему координат. Переход от одной системы к предыдущей описывается линейным преобразованием, как известно, задаваемым матрицей. Через $X^k = (x^k, y^k, z^k, 1)^T$, $k = 0, 1, \ldots, 6$. обозначим координаты k-ой системы координат. При $k = 0$ будем иметь базовую систему координат. Как обычно, считаем, что поворот против часовой стрелки является положительным.

Сначала происходит поворот на угол α_1 и сдвиг по направлению оси x на величину l_1. Следовательно, $X^0 = T_0 X^1$, где

$$T_0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & 0 & -\sin\alpha_1 & l_1\cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & 0 & \cos\alpha_1 & l_1\sin\alpha_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее делается поворот на угол α_2 около оси z и сдвиг на величину l_2. Поэтому $X^1 = T_1 X^2$, где

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & l_2\cos\alpha_2 \\ -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & -l_2\sin\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Потом происходит поворот на угол α_3 и делается сдвиг на величину l_3. Таким образом, $X^2 = T_2X^3$, где

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 & l_3\cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 & l_3\sin\alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее делается поворот на угол α_4 около оси z и сдвиг по оси x на величину l_4. Имеем, что $X^3 = T_3X^4$, где

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_4 & \sin\alpha_4 & 0 & l_4\cos\alpha_4 \\ -\sin\alpha_4 & \cos\alpha_4 & 0 & -l_4\sin\alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем производится поворот на угол α_5 около оси y и делается сдвиг по оси x на величину l_5. Получаем, что $X^4 = T_4X^5$, где

$$T_4 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_5 & 0 & -\sin\alpha_5 & l_5\cos\alpha_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_5 & 0 & \cos\alpha_5 & l_5\sin\alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остается сделать поворот на угол α_6 около оси x и сдвиг на величину $-l_6$ по оси y. Следовательно, $X^5 = T_5X^6$, где

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_6 & -\sin\alpha_6 & -l_6\cos\alpha_6 \\ 0 & \sin\alpha_6 & \cos\alpha_6 & -l_6\cos\alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем, что $X^0 = TX^6$, где $T = T_0T_1\dots T_5$. Пусть для краткости,

$$a_{11} = \cos\alpha_1\cos\alpha_5 - \sin\alpha_1\sin\alpha_5\,,$$

$$a_{12} = -\cos\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 - \sin\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6\,,$$

$$a_{13} = -\cos\alpha_1\sin\alpha_5\cos\alpha_6 - \sin\alpha_1\cos\alpha_5\cos\alpha_6\,,$$

$$\begin{aligned} a_{14} = {} & l_6\cos\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_1\cos\alpha_5 + l_4\cos\alpha_1 + l_3\cos\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) \\ & - l_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + l_6\sin\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_1\sin\alpha_5 + l_1\cos\alpha_1\,, \end{aligned}$$

$$a_{21} = \sin\alpha_1\cos\alpha_5 + \cos\alpha_1\sin\alpha_5\,,$$

$$a_{22} = -\sin\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + \cos\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6\,,$$

$$a_{23} = -\sin\alpha_1\sin\alpha_5\cos\alpha_6 + \cos\alpha_1\cos\alpha_5\cos\alpha_6\,,$$

$$\begin{aligned} a_{24} = {} & l_6\sin\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\sin\alpha_1\cos\alpha_5 + l_4\sin\alpha_1 + l_3\sin\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) \\ & - l_2\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - l_6\cos\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_1\sin\alpha_5 + l_1\sin\alpha_1 \end{aligned}$$

$$a_{34} = l_6\cos\alpha_6 - l_3\sin(\alpha_2+\alpha_3) - l_2\sin\alpha_2\,.$$

Тогда, после перемножения матриц, находим, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & -\cos\alpha_6 & \sin\alpha_6 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^6 \\ y^6 \\ z^6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда без труда находим, что ($l_2 = l_3$)

$$\begin{cases} x = l_6\cos\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_1\cos\alpha_5 + l_4\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) \\ \qquad -l_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + l_6\sin\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_1\sin\alpha_5 + l_1\cos\alpha_1, \\ y = l_6\sin\alpha_1\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\sin\alpha_1\cos\alpha_5 + l_4\sin\alpha_1 + l_2\sin\alpha_1\cos(\alpha_2+\alpha_3) \\ \qquad -l_2\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - l_6\cos\alpha_1\cos\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_1\sin\alpha_5 + l_1\sin\alpha_1, \\ z = l_6\cos\alpha_6 - l_2\sin(\alpha_2+\alpha_3) + l_2\sin\alpha_2. \end{cases} \tag{1}$$

Возводя в квадрат x и y и складывая, получаем, что

$$\begin{aligned} & -2l_2\sin\left(\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}\right)\sin\frac{\alpha_3}{2} \\ & = \pm\sqrt{x^2+y^2-(l_6\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_5)^2} \\ & \quad - l_6\sin\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\cos\alpha_5 - l_4 - l_1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Из последнего равенства системы имеем, что

$$-2l_2\sin\left(\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}\right)\sin\frac{\alpha_3}{2} = z - l_6\cos\alpha_6\,. \tag{3}$$

Возводя уравнения (2) и (3) в квадрат и складывая, получаем

$$\begin{aligned} & 4l_2^2\sin^2\frac{\alpha_3}{2} \\ & = x^2+y^2-(l_6\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_5)^2 + (l_6\sin\alpha_5\cos\alpha_6 + l_5\cos\alpha_5 + l_4)^2 \\ & \pm 2(l_6\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_5 + l_4 + l_1)\sqrt{x^2+y^2-(l_6\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_5)^2} \\ & + (z - l_6\cos\alpha_6)^2\,. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \alpha_3 = \pm\, 2(-1)^m \arcsin\frac{1}{2l_2}\Big(& x^2+y^2-(l_6\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_5)^2 \\ & + (l_6\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_5 + l_4 + l_1)^2 \\ & \pm 2(l_6\sin\alpha_5\sin\alpha_6 + l_5\cos\alpha_5 + l_4 + l_1) \\ & \quad \times\sqrt{x^2+y^2-(l_6\cos\alpha_5\sin\alpha_6 - l_5\sin\alpha_5)^2} \\ & + (z - l_6\cos\alpha_5)^2\Big)^{1/2} + m\pi\,. \end{aligned}$$

Положим

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2 - (l_6 \cos\alpha_6 \cos\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5)^2} - l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \cos\alpha_5 - l_4 - l_1 .$$

Тогда первое и второе уравнения системы (1) можем переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} x &= (l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) \cos\alpha_1 \\ &\quad + (l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5) \sin\alpha_1, \\ y &= (l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) \sin\alpha_1 \\ &\quad - (l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5) \cos\alpha_1. \end{aligned}$$

Отсюда, считая $\cos\alpha_1 \neq 0$, находим

$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha_1 \big((l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) \\ &\quad + (l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5) \operatorname{tg} \alpha_1 \big), \\ y &= \cos\alpha_1 \big((l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) \operatorname{tg} \alpha_1 \\ &\quad - (l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5) \big). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y(l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) + x(l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5)}{x(l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) - y(l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5)},$$

и отсюда

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \operatorname{arctg} &\frac{y(l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) + x(l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5)}{x(l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 \pm \delta) - y(l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5)} \\ &+ m\pi . \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что последняя формула остается справедливой и в том случае, когда $\cos\alpha_1 = 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} x &= l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5, \\ y &= l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 + \delta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x(l_6 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6 + l_5 \cos\alpha_5 + l_4 + l_1 + \delta) = y(l_6 \cos\alpha_5 \sin\alpha_6 - l_5 \sin\alpha_5).$$

Следовательно, знаменатель формулы для α_2 равен 0, т.е. $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$.

Найдем еще угол α_2. Делим уравнение (2) на уравнение (3). Получаем, что

$$\operatorname{tg} \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} \right) = \frac{\delta}{z - l_6 \cos\alpha_6},$$

и следовательно,

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_3}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\delta}{z - l_6 \cos\alpha_6} + m\pi \,.$$

Значения целого m и знаки $+$ и $-$ в полученных формулах для углов α_1, α_2 и α_3 можно выбирать произвольным образом.

Apie vieną triginometrinę sistemą

A. Laurinčikas

Nagrinėjama 6 grandžių trigonometrinė sistema. Visos grandys atlieka sukamuosius judesius apie tam tikras ašis. Naudojant matricinį metodą, gautos formulės trims posūkio kampams, kad šeštosios grandies galas patektų į duotą erdvės tašką.