

Atstatymo proceso hipotezių tikrinimas esant lokaliajam asimptotiniam normalumui

Vaidotas Kanišauskas 

Šiaulių akademija, Vilniaus universitetas, Lietuva 

✉ Korespondentas: kanisauskasva@gmail.com

Įteiktas 2025 liepos 7; publikuotas 2025 gruodžio 21

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjamas atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi indukuotas statistinis eksperimentas. Galiojant tikimybinių matų lokaliajam asimptotiniam normalumui rasti asimptotiškai lokaliai galingiausi kriterijai tikrinant paprastąją hipotezę su sudėtingąja parametrine alternatyva. Taip pat parodoma, kaip praktiškai tikrinamos minėtos hipotezės su konkrečiais duomenimis.

Raktiniai žodžiai: atstatymo procesas; lokalusis asimptotinis normalumas; asimptotiškai lokaliai galingiausias kriterijus

AMS: 46N30, 60G55, 62F03, 62F05

Įvadas

Straipsnis skirtas vienparametrinių statistinių hipotezių $H_0 : \theta = \theta_0$ ir $H_1^1 : \theta > \theta_0$ (arba $H_1^2 : \theta < \theta_0$, arba $H_1^3 : \theta \neq \theta_0$) su fiksuotu reikšmingumo lygmeniu $\alpha \in (0, 1)$ tikrinimui pagal atstatymo proceso N_s stebėjimus, kai $s \in [0, t]$.

Tokių hipotezių tikrinimo pradžia galima laikyti A. Wald'o darbą [15], kur pirmą kartą išsakyta idėja apie tikimybinių matų šeimų aproksimavimą Gauso skirstiniu. Po šio darbo asimptotinė statistika pasuko dviem kryptimis. Pagal pirmąją, L. Le Cam'as [2] įvedė lokalaus asimptotinio normalumo (LAN) apibrėžimą, kuris vėliau sėkmingai buvo taikomas asimptotinėje įverčių teorijoje [3, 4, 9, 10, 11, 13, 6, 8]. Antra kryptis pajudėjo pagal R. A. Johnson'o ir G. G. Roussas'o metodą [5], kur hipotezės $H_0 : \theta = \theta_0$ alternatyva $H_1^1 : \theta > \theta_0$ (arba $H_1^2 : \theta < \theta_0$, arba $H_1^3 : \theta \neq \theta_0$) pakeičiama į artimą hipotezę $H_1 : \theta = \theta_n$, čia $\theta_n = \theta_0 + h_n n^{-\frac{1}{2}}$ ir $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $n \rightarrow \infty$. Šis metodas išplėtotas G. G. Roussas'o monografijoje [14]. Nors G. G. Roussas'o darbe

nagrinėjamas diskretaus laiko Markovo procesas, tačiau pats metodas yra universalus ir gali būti perdarytas bet kurios prigimties stebėjimų statistiniams eksperimentams.

R. A. Johnson'o ir G. G. Roussas'o hipotezių tikrinimo metodą tolydaus laiko statistiniams eksperimentams perdirbo J. N. Linkovas savo straipsnyje [12], kuriame suformulavo bendrąsias universaliąsias sąlygas:

III, III'. Egzistuoja

$$\ln \frac{dP_{\theta_1}^t}{dP_{\theta_0}^t} = u'_t \Delta_t - \frac{1}{2} |u_t|^2 + R_t \quad \text{su} \quad \theta_1^t = \theta_0 + u_t \varphi_t,$$

čia $u_t \in R^k$ – toks neatsitiktinis vektorius, kad $u_t \rightarrow u \in R^k$, kur φ_t – tokia teigiama simetrinė matrica, kad $|\varphi_t|^2 = Sp \varphi_t^2 \rightarrow 0$, Δ_t – toks atsitiktinis vektorius, kad $\mathcal{L}(\Delta_t | P_{\theta_0}) \Rightarrow N(0, J)$; čia J – vienetinė matrica, o $P_{\theta_0} - \lim_{t \rightarrow \infty} R_t = 0$.

Šios sąlygos padeda gauti asimptotiškai lokaliai galingiausius (ALG) kriterijus – 4 ir 5 teoremų (iš [12]) pirmąsias dalis, tikrinant $H_0 : \theta = \theta_0$ su sudėtingąja alternatyva $H_1 : \theta > \theta_0$ (arba $\theta < \theta_0$, arba $\theta \neq \theta_0$). Tačiau ir [12], ir R. A. Johnson'o ir G. G. Roussas'o darbuose [5, 14] pateiktos pradinės sąlygos yra perteklinės, nes jose laikoma, kad parametrinė aibė yra $\Theta \subset R^k$, $k > 1$, t. y. daugiamatė, o rezultatas suformuluotas tik vienmačiu, kai $\Theta \subset R$, atveju.

Šio straipsnio 1 dalyje ši klaida yra ištaisyta ir pateiktas R. A. Johnson'o ir G. G. Roussas'o metodas bendru atveju, kai $\Theta \subset R$. Čia minimą paprastosios hipotezės su sudėtingąja alternatyva tikrinimo metodą taškinių procesų modeliams pirmas pritaikė J. A. Kutojancas [9], nagrinėdamas Puasono tipo taškinis procesus ir tikrindamas hipotezes $H_0 : \theta = \theta_0$ ir $H_1 : \theta > \theta_0$, kai $\Theta \subset R$.

Vėliau minėtą metodą taikė J. N. Linkovas [12], nagrinėdamas skaičiuojančius procesus ir naudodamas asimptotinį reikšmingumo lygmenį $\alpha_t \rightarrow \alpha \in (0, 1)$. J. N. Linkovo darbe nurodytos pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai, atsižvelgiant į G. G. Roussas'o taikomus [14], yra naudojami ir šiame darbe.

Antroje straipsnio dalyje R. A. Johnson'o ir G. G. Roussas'o metodas, pateiktas 1 dalyje, yra pritaikytas atstatymo proceso modeliui. Nors tikimybinių matų P_θ , $\theta \in \Theta$, lokalaus asimptotinio normalumo (LAN) išraiška

$$\ln \frac{dP_{\theta_u}^t}{dP_\theta^t} = u \Delta_t(\theta) - \frac{1}{2} u^2 + R_t(\theta, u)$$

su $\theta_u^t = \theta + u \varphi_t(\theta)$ yra labai panaši į 1 dalies A1 sąlygoje pateiktą išraišką

$$\ln \frac{dP_{\theta_1}^t}{dP_{\theta_0}^t} = u_t \Delta_t - \frac{1}{2} u_t^2 + R_t,$$

kur $\theta = \theta_0$, o $\theta_1^t = \theta_0 + u_t \varphi_t(\theta_0)$, tačiau LAN išraiškoje neatsitiktinis realusis kintamasis u nepriklauso nuo parametro t ir, pagal 2 dalyje pateiktą B4 sąlygą, yra aprėžtas, t. y. $|u| \leq c$, $c \in (0, \infty)$, kai $u \in U_{\theta, t}$. Vadinas, jei $\theta_u^t = \theta_1^t = \theta_0 + u \varphi_t(\theta_0)$, tai $(\theta_1^t - \theta_0) \varphi_t^{-1}(\theta_0) = u$ yra aprėžtas ir, pagal G. G. Roussas'o [14] 4 skyriaus 3.1, 3.2, 5.3 išvadas, egzistuoja tik ALG kriterijus visais alternatyvų $H_1^1 : \theta > \theta_0$, $H_1^2 : \theta < \theta_0$ ir $H_1^3 : \theta \neq \theta_0$ atvejais.

Suformuluojant pagrindines B sąlygas atstatymo procesui buvo panaudoti [6, 7, 8] darbai. Iš [6] darbo buvo palikta D4 sąlyga supaprastintu B4 pavidalu, kad matytųsi

realaus neatsitiktinio kintamojo u iš $\theta_u^t = \theta + u\varphi_t(\theta)$ aprėžtumas: $|u| \leq c$, $c \in (0, \infty)$, $u \in U_{\theta,t}$. B4 sąlyga išlieka, nes B2 sąlygoje nebereikalaujama, kad išvestinė $\dot{h}(\theta, X_1)$ būtų tolydi vidurkio kvadrato prasme.

Straipsnio pabaigoje pateikti keli pavyzdžiai su realiaisiais duomenimis, iliustruojantys pateiktą teorinį rezultatą.

1 Artimų hipotezių tikrinimas

Tarkime, kad $(\mathcal{X}^t, \mathcal{F}^t, P_\theta^t, \theta \in \Theta), t \geq 0$, – stochastinių eksperimentų šeima [4], gauta iš bet kurios prigimties stebėjimų $X^t = \{X_s, 0 \leq s \leq t\}$, kai $\Theta \subset R$ – tam tikra atvira ir iškila parametrinė aibė. Laikome, kad $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_t^X$, kur $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \in [0, t])$ ir $P_\theta^t = P_\theta|_{\mathcal{F}_t^X}$, – mato P_θ susiaurinimas σ -algebroje $\mathcal{F}_t^X$.

Pagal stebėjimus X^t tikrinsime paprastąją statistinę hipotezę $H_0 : \theta = \theta_0 (\theta_0 \in \Theta)$ su vienpuse sudėtingąja alternatyva $H_1^1 : (\theta > \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ arba $H_1^2 : (\theta < \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ arba su dvipuse alternatyva $H_1^3 : (\theta \neq \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$. Bendrai galima laikyti, kad tikriname hipotezes $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta \in \Theta_1, \theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Išmatuojamas atvaizdis $\delta_t(x)$ iš erdvės $(\mathcal{X}^t, \mathcal{F}^t)$ į $[0, 1]$, o taip pat ir atsitiktinis dydis $\delta_t = \delta_t(X^t)$ vadinamas hipotezės H_0 tikrinimo kriterijumi. $\delta_t(x)$ yra sąlyginė tikimybė atmesti hipotezę H_0 su sąlyga $X^t = x$. Kriterijus δ_t turi galios funkciją

$$\beta(\theta, \delta_t) = \mathbb{E}_\theta \delta_t, \quad \theta \in \Theta.$$

Tada pirmos ir antros rūšies klaidų tikimybės atitinkamai yra

$$\begin{aligned} \alpha_0(\theta_0) &= \mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t = \beta(\theta_0, \delta_t), \\ \alpha_1(\theta) &= 1 - \beta(\theta, \delta_t), \quad \theta \in \Theta_1. \end{aligned}$$

α vadinamas reikšmingumo lygmeniu, jei $\alpha \in (0, 1)$ ir $\alpha_0(\theta_0) = \mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t = \alpha$.

α reikšmingumo lygmens hipotezių H_0, H_1 tikrinimo statistinis kriterijus δ_t^0 vadinamas asimptotiškai tolygiai galingiausiu (ATG), jei bet kuriam kitam α reikšmingumo lygmens kriterijui δ_t galioja sąryšis

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta_1} (\mathbb{E}_\theta \delta_t - \mathbb{E}_\theta \delta_t^0) \leq 0.$$

α reikšmingumo lygmens kriterijus δ_t^1 vadinamas asimptotiškai nepaslinktu, jei

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta_1} (\beta(\theta, \delta_t^1)) \geq \alpha, \quad \text{čia } \Theta_1 = \Theta \setminus \{\theta_0\}.$$

α reikšmingumo lygmens kriterijus δ_t^2 vadinamas asimptotiškai lokaliai galingiausiu (ALG), jei

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \{ \mathbb{E}_\theta \delta_t - \mathbb{E}_\theta \delta_t^2; \theta \in \Theta_1^t \} \leq 0,$$

bet kuriam kitam α reikšmingumo lygmens statistiniam kriterijui δ_t ; čia $\Theta_1^t = (\theta_0, \theta_0 + u\varphi_t) \cap \Theta$, $u > 0$, kai tikrinamos $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0$, ir $\Theta_1^t = (\theta_0 - u\varphi_t, \theta_0) \cap \Theta$, $u > 0$, kai tikrinamos $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta < \theta_0$.

Nurodytos hipotezės tikrinamos G. G. Roussas'o metodu [14], kai pradinės hipotezės alternatyva keičiama į hipotezę $H_1^t : \theta = \theta_1^t$, kur $\theta_1^t = \theta_0 + u_t\varphi_t \rightarrow \theta_0$, kai $t \rightarrow \infty$.

Pagal tai, ar $(\theta_1^t - \theta_0) \cdot \varphi_t^{-1}$ apręžta iš viršaus, ar iš apačios, ar bendrai apręžta, yra gaunami asimptotiškai lokaliai galingiausi statistiniai kriterijai, kuriais tikrinamos hipotezės $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0; H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta < \theta_0; H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0$.

G. G. Roussas'o artimų hipotezių metodas tolydaus laiko $t \geq 0$ statistiniams eksperimentams $\mathcal{E}^t = (\mathcal{X}^t, \mathcal{F}^t, P_\theta^t, \theta \in \Theta)$ su stebėjimais $X^t \in \mathcal{X}^t$ ir $P_\theta^t = P_\theta|_{\mathcal{F}_t^X}$ remiasi A sąlygomis:

A1. Tarkime, kad tikėtinumo santykis $\frac{dP_{\theta_1^t}^t}{dP_{\theta_0}^t}$ turi išraišką

$$L_t(\theta_1^t, \theta_0) = \ln \frac{dP_{\theta_1^t}^t}{dP_{\theta_0}^t} = u_t \Delta_t - \frac{1}{2} u_t^2 + R_t;$$

čia $u_t \in R$ – neatsitiktinė funkcija, $\Delta_t = \Delta_t(X^t)$ – tokia atsitiktinė funkcija, kad $\mathcal{L}(\Delta_t | P_{\theta_0}) \Rightarrow N(0, 1)$, $t \rightarrow \infty$, (čia $\Rightarrow$ žymi silpną konvergavimą), o R_t – atsitiktinė liekana: $P_{\theta_0} - \lim_{t \rightarrow \infty} R_t = 0$, kur $P - \lim_{t \rightarrow \infty}$ žymi konvergavimą pagal P -tikimybę, kai $t \rightarrow \infty$.

A2. Tegu $\theta_1^t = \theta_0 + u_t \varphi_t$, kur $u_t \rightarrow u \in R$ (u – konstanta), o $\varphi_t > 0$ tokia, kad $\varphi_t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

1 teorema. ([12] 4 ir 5 teoremų pirmosios (ALG) dalys, $k = 1$) Tarkime, kad galioja A1–A2 sąlygos.

- 1) Jei A2 sąlygoje $0 < u_t$, $0 < u$, tai hipotezių $H_0 : \theta = \theta_0 (\in \Theta)$ ir $H_1^1 : (\theta > \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ tikrinimo ALG kriterijaus išraiška yra tokia:

$$\delta_t^1 = \mathbb{I}(\Delta_t > c_t) + \varepsilon_t \mathbb{I}(\Delta_t = c_t);$$

čia $\mathbb{I}(A) = \begin{cases} 1, & \text{jei } A \text{ teisinga,} \\ 0, & \text{jei } A \text{ neteisinga,} \end{cases}$ o parametrai $c_t \in R$, $\varepsilon_t \in [0, 1]$ randami iš lygybės $\mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t^1 = \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

- 2) Jei A2 sąlygoje $u_t < 0$, $u < 0$, tai hipotezių $H_0 : \theta = \theta_0 (\in \Theta)$ ir $H_1^2 : (\theta < \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ tikrinimo ALG kriterijaus išraiška yra tokia:

$$\delta_t^2 = \mathbb{I}(\Delta_t < c_t) + \varepsilon_t \mathbb{I}(\Delta_t = c_t);$$

čia parametrai $c_t \in R$, $\varepsilon_t \in [0, 1]$ randami iš lygybės $\mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t^2 = \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

- 3) Jei A2 sąlygoje $u_t \neq 0$, t. y. $u_t < 0$ arba $u_t > 0$, ir $u \neq 0$, tai hipotezių $H_0 : \theta = \theta_0 (\in \Theta)$ ir $H_1^3 : (\theta \neq \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ tikrinimo nepaslinkto ALG kriterijaus išraiška yra tokia:

$$\delta_t^3 = \mathbb{I}((\Delta_t > a_t) \cup (\Delta_t < b_t)),$$

čia parametrai $a_t \in R$, $b_t \in R$ randami iš lygybės $\mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t^3 = \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

1 pastaba. Analogiški rezultatai, tik diskretaus laiko Markovo procesams, pateikti [14] 4 skyriaus 3.1 teoremos 3.1 išvadoje – 1) rezultatas, 3.2 teoremos 3.2 išvadoje – 2) rezultatas, 5.3 teoremos 5.3 išvadoje – 3) rezultatas. Daugelis mokslininkų [9, 12, 1]

pastebėjo, kad čia minimi rezultatai yra universalūs ir tinka įvairiems modeliams. Arčiausią 1 teoremai formuluotę pateikė J. N. Linkovas [12], nurodydamas analogiškas sąlygas ir rezultatus skaičiuojantiems procesams. Tačiau greičiausiai J. N. Linkovas tame darbe padarė korektūros klaidą ne visur 4 ir 5 teoremose nurodydamas, kad nagrinėjamas tik vienmatis atvejis, t. y. $\Theta \subset R^k$, $k = 1$, nes cituodamas G. G. Rousas'o [14] 4 skyriaus 3.1 ir 5.1 teoremas nepastebėjo, kad jos įrodytos tik vienmačiu, t. y. $k = 1$, atveju.

1 lema. [14, 4 sk.] *Tarkime, kad $\{Y_n\}$ yra atsitiktinių dydžių seka, apibrėžta mačiojoje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, ir kiekvienam n Q_n – tikimybinis matas joje. Tarkime, kad*

$$\mathcal{L}(Y_n | Q_n) \Rightarrow N(\mu, \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

Tada

1) *kiekvienai skaičių sekai $\{y_n\}$*

$$Q_n(Y_n = y_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

2) *Jei skaičių sekos $\{c_n\}$ ir $\{\gamma_n\}$, $0 \leq \gamma_n \leq 1$, tokios, kad*

$$Q_n(Y_n > c_n) + \gamma_n Q_n(Y_n = c_n) = \alpha, \quad \alpha \in (0, 1),$$

tai

$$c_n \rightarrow \mu + \sigma u_{1-\alpha}, \quad n \rightarrow \infty,$$

čia $u_{1-\alpha}$ yra $N(0, 1)$ skirstinio $1 - \alpha$ eilės kvantilis.

1 išvada [1 teoremos išvada]. *Tarkime, kad galioja 1 teoremos sąlygos. Tada apytiksliai galima laikyti, kad*

$$\begin{aligned} \delta_t^1 &= \mathbb{I}(\Delta_t > u_{1-\alpha}), \\ \delta_t^2 &= \mathbb{I}(\Delta_t < u_\alpha), \\ \delta_t^3 &= \mathbb{I}(|\Delta_t| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}), \end{aligned}$$

čia u_β yra $N(0, 1)$ skirstinio β eilės kvantilis.

Įrodymas. 1) Turime kriterijų $\delta_t^1 = \mathbb{I}(\Delta_t > c_t) + \varepsilon_t \mathbb{I}(\Delta_t = c_t)$. Jam pritaikysime 1 lema su $Y_t = \Delta_t$, $Q_t = P_{\theta_0}$. Kadangi $\mathcal{L}(\Delta_t | P_{\theta_0}) \Rightarrow N(0, 1)$, $t \rightarrow \infty$, t. y. $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Vadinas, pagal 1 lemos 1) dalį $P_{\theta_0}(\Delta_t = c_t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Kadangi $\mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t^1 = P_{\theta_0}(\Delta_t > c_t) + \varepsilon_t P_{\theta_0}(\Delta_t = c_t) = \alpha$, tai, pagal 1 lemos 2) dalį, $c_t \rightarrow \mu + \sigma u_{1-\alpha} = 0 + 1 \cdot u_{1-\alpha} = u_{1-\alpha}$, $t \rightarrow \infty$.

Vadinas, apytiksliai $\delta_t^1 = \mathbb{I}(\Delta_t > u_{1-\alpha})$.

2) Turime kriterijų $\delta_t^2 = \mathbb{I}(\Delta_t < c_t) + \varepsilon_t \mathbb{I}(\Delta_t = c_t)$. Kadangi $\mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t^2 = P_{\theta_0}(\Delta_t < c_t) + \varepsilon_t P_{\theta_0}(\Delta_t = c_t) = \alpha$, tai, analogiškai δ_t^1 įrodymui, $P_{\theta_0}(\Delta_t = c_t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Iš čia $P_{\theta_0}(\Delta_t < c_t) \rightarrow \alpha$ ir $c_t \rightarrow \mu + \sigma u_\alpha = 0 + 1 \cdot u_\alpha = u_\alpha$.

Vadinas, apytiksliai $\delta_t^2 = \mathbb{I}(\Delta_t < u_\alpha)$.

3) Turime kriterijų $\delta_t^3 = \mathbb{I}((\Delta_t > a_t) \cup (\Delta_t < b_t))$. Kadangi $\mathbb{E}_{\theta_0} \delta_t^3 = P_{\theta_0}(\Delta_t > a_t) + P_{\theta_0}(\Delta_t < b_t) = \alpha$, tai dėl $N(0, 1)$ tankio funkcijos simetriškumo pritaikius 1) ir 2) rezultatą gauname, kad $a_t \rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $b_t \rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $t \rightarrow \infty$.

Vadinas, $P_{\theta_0}(\Delta_t > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) + P_{\theta_0}(\Delta_t < -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P_{\theta_0}(|\Delta_t| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$, tai reiškia, apytiksliai $\delta_t^3 = \mathbb{I}(|\Delta_t| > u_{1-\frac{\alpha}{2}})$.

Visur įrodyme u_β žymėjo $N(0, 1)$ skirstinio β eilės kvantilį. $\square$

2 Atstatymo procesas

Tarkime, kad stochastinėje bazėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$, kur $\Theta \subset R$ atvira ir iškila aibė, nusakytas skaičiuojantis procesas $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}(T_n \leq t)$, $t \in R_+ = [0, +\infty)$, kurio tarpiniai atstatymo momentai $X_i = T_i - T_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$ ($T_0 = 0$), nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Toks procesas vadinamas atstatymo procesu. Jį charakterizuoja $X_1 = T_1$ pasiskirstymo funkcija $P_\theta(X_1 \leq t) = F(\theta, t)$, $\theta \in \Theta$, $t \in R_+$. Laikysime, kad

$$F(\theta, t) = \int_0^t p(\theta, s) ds, \quad \theta \in \Theta.$$

Pažymėkime $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$ ir toliau laikysime, kad $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$.

Toliau pateiktos B sąlygos remiasi 2 ir 3 lemomis.

2 lema. [6] Jei $F(\theta, t)$ turi $h(\theta, t) = \frac{p(\theta, t)}{1-F(\theta, t)}$, tada proceso N_t $(\mathbb{F}, P_\theta)$ -kompensatorius $\nu(\theta, t)$ turi tokią išraišką:

$$\nu(\theta, t) = \int_0^t h(\theta, L_s) ds = \sum_{i=1}^{N_{t-}} \int_0^{X_i} h(\theta, s) ds + \int_0^{t-T_{N_{t-}}} h(\theta, s) ds, \quad t \in R_+, \quad L_s = s - T_{N_{s-}}.$$

3 lema. [6] Jei $0 < \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty$, $0 < \mathbb{E}_\theta u(\theta, X_1) < \infty$, tai

$$P_\theta \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t u(\theta, L_s) d\nu(\theta, s)}{\frac{t \mathbb{E}_\theta u(\theta, X_1)}{\mathbb{E}_\theta X_1}} = 1 \right) = 1.$$

Įvedame B sąlygas.

B1. $\int_0^t h(\theta, s) ds < \infty$, $\theta \in \Theta \subset R$, $t \in R_+$.

B2. Funkcijos $h(y, X_1)$, $\ln h(y, X_1)$ diferencijuojamos vidurkio kvadrato prasme taške y iš tam tikros θ aplinkos $U_\delta(\theta)$, kai $\theta \in \Theta$ ir išvestinė $\dot{h}(y, X_1)$ tokia, kad

$$0 < a(y) = \mathbb{E}_y X_1 < \infty, \quad \mathbb{E}_y |\dot{h}(y, X_1)|^2 < \infty, \quad \mathbb{E}_y \left| \frac{\dot{h}(y, X_1)}{h(y, X_1)} \right|^2 < \infty,$$

kai $y \in U_\delta(\theta) = \{x : |x - \theta| < \delta\}$.

B3. Egzistuoja tokia konstanta $0 < \delta < 1$, kad su visais $\theta \in \Theta$

$$\mathbb{E}_\theta \left| \frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} \right|^{2+\delta} < \infty.$$

B4. Su visais $\theta \in \Theta$ ir $c > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|u| \leq c, u \in U_{\theta, t}} \mathbb{E}_\theta \left| \frac{\dot{h}(\theta_u^t, X_1)}{h(\theta_u^t, X_1)} - \frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} \right|^2 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|u| \leq c, u \in U_{\theta, t}} \mathbb{E}_\theta \left| \frac{\dot{h}(\theta_u^t, X_1)}{h(\theta_u^t, X_1)} - \frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} \right|^2 = 0;$$

čia $\varphi_t(\theta) = [I_t(\theta)]^{-\frac{1}{2}}$, $\theta_u^t = \theta + u\varphi_t(\theta)$, $U_{\theta, t} = \{u \in R : \theta_u^t \in \Theta\}$, $\theta \in \Theta$, $t \in R_+$, $I_t(\theta) = \frac{t}{a(\theta)} I(\theta)$, $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left| \frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} \right|^2$, $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1$.

2 teorema. [6, 7, 8] Tarkime, kad galioja B1–B4 sąlygos. Tada matų šeima $\{P_\theta^t, \theta \in \Theta\}$ ($P_\theta^t = P_\theta|_{\mathcal{F}_t^N}$), kai $t \rightarrow \infty$, yra lokaliai asimptotiškai normali (LAN) su normuojančia funkcija

$$\Delta_t(\theta) = \varphi_t(\theta) \int_0^t \frac{\dot{h}(\theta, L_s)}{h(\theta, L_s)} d(N_s - \nu(\theta, s)),$$

t. y. su visais $u \in U_{\theta, t}$ galioja tokia išraiška:

$$L_t(\theta_u^t, \theta) = \ln \frac{dP_{\theta_u^t}^t}{dP_\theta^t} = u \Delta_t(\theta) - \frac{1}{2} u^2 + R_t(\theta, u),$$

čia $\mathcal{L}(\Delta_t(\theta)|P_\theta) \Rightarrow N(0, 1)$, $t \rightarrow \infty$, $P_\theta - \lim_{t \rightarrow \infty} R_t(\theta, u) = 0$.

2 išvada. Tarkime, kad tenkinamos B1–B4 sąlygos, kai $\theta_0 \in \Theta$ ir $\theta_1^t = \theta_0 + u_t \varphi_t(\theta_0)$, o $u_t \in R$ – neatsitiktinė funkcija. Tada galioja A1 sąlyga, t. y. turime išraišką

$$L_t(\theta_1^t, \theta_0) = \ln \frac{dP_{\theta_1^t}^t}{dP_{\theta_0}^t} = u_t \Delta_t(\theta_0) - \frac{1}{2} u_t^2 + R_t, \quad (1)$$

kur $\Delta_t(\theta_0) = \varphi_t(\theta_0) \int_0^t \frac{\dot{h}(\theta_0, L_s)}{h(\theta_0, L_s)} d(N_s - \nu(\theta_0, s))$ tokia, kad $\mathcal{L}(\Delta_t(\theta_0)|P_{\theta_0}) \Rightarrow N(0, 1)$, $t \rightarrow \infty$, o $P_{\theta_0} - \lim_{t \rightarrow \infty} R_t = 0$.

Jei dar ir $u_t \rightarrow u = \text{const.}$, kai $t \rightarrow \infty$, tada galioja A2 sąlyga.

Irodymas. (1) formulė tiesiogiai gaunama iš 2 teoremos. $\square$

Dabar galima suformuluoti pagrindinį darbo uždavinį.

Turime atstatymo proceso N_t stebėjimus $N_t = \{N_s, s \in [0, t]\}$, į kuriuos įeina tarpiniai atstatymo momentai $X_1, X_2, \dots, X_{N_{t-}}$ su $t - T_{N_{t-}}$, kur $T_{N_{t-}} = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_{t-}}$. Pagal šiuos stebėjimus reikia sukonstruoti asimptotiškai lokaliai galingiausius (ALG) kriterijus δ_t^i , $i = 1, 2, 3$, kuriais naudojantis tikrinamos statistinės hipotezės: $H_0 : \theta = \theta_0, H_1^1 : \theta > \theta_0; H_0 : \theta = \theta_0, H_1^2 : \theta < \theta_0; H_0 : \theta = \theta_0, H_1^3 : \theta \neq \theta_0$, esant nurodytam reikšmingumo lygmeniui $\alpha \in (0, 1)$.

Panaudojus 1 teoremą ir jos išvadą bei 2 teoremą ir jos išvadą gaunamas pagrindinis darbo rezultatas:

3 teorema. Tarkime, kad galioja B1–B4 sąlygos, kai $\theta = \theta_0 \in \Theta$.

- 1) Jei B4 sąlygoje $0 < u < c$, $c \in R_+$, tai hipotezių $H_0 : \theta = \theta_0$ ir $H_1^1 : (\theta > \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ tikrinimo ALG kriterijaus išraiška yra tokia:

$$\delta_t^1 = \mathbb{I}(\Delta_t(\theta_0) > u_{1-\alpha}).$$

- 2) Jei B4 sąlygoje $-c < u < 0$, $c \in R_+$, tai hipotezių $H_0 : \theta = \theta_0$ ir $H_1^2 : (\theta < \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ tikrinimo ALG kriterijaus išraiška yra tokia:

$$\delta_t^2 = \mathbb{I}(\Delta_t(\theta_0) < u_\alpha).$$

3) Jei B_4 sąlygoje $0 < |u| < c$, $c \in R_+$, tai hipotezių $H_0 : \theta = \theta_0$ ir $H_1^3 : (\theta \neq \theta_0) \cap (\theta \in \Theta)$ tikrinimo nepaslinkto ALG kriterijaus išraiška yra tokia:

$$\delta_t^3 = \mathbb{I}(|\Delta_t(\theta_0)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}).$$

Čia u_β yra $N(0, 1)$ skirstinio β eilės kvantilis, o

$$\begin{aligned} \Delta_t(\theta_0) &= \varphi_t(\theta_0) \int_0^t \frac{\dot{h}(\theta_0, L_s)}{h(\theta_0, L_s)} d(N_s - \nu(\theta_0, s)) \\ &= \varphi_t(\theta_0) \left(\sum_{i=1}^{N_t} \frac{\dot{h}(\theta_0, X_i)}{h(\theta_0, X_i)} - \left(\sum_{i=1}^{N_t} \int_0^{X_i} \dot{h}(\theta_0, s) ds - \int_0^{t-T_{N_t-}} \dot{h}(\theta_0, s) ds \right) \right), \\ \varphi_t(\theta_0) &= \left(\frac{a(\theta_0)}{tI(\theta_0)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad I(\theta_0) = \mathbb{E}_{\theta_0} \left| \frac{\dot{h}(\theta_0, X_1)}{h(\theta_0, X_1)} \right|^2, \quad a(\theta_0) = \mathbb{E}_{\theta_0} X_1, \quad L_s = s - T_{N_{s-}}. \end{aligned}$$

3 Pavyzdžiai

1) Atstatymo proceso tarpiniai momentai yra eksponentiniai su parametru $\theta > 0$. Raskime $\varphi_t(\theta)$ ir $\Delta_t(\theta)$.

▷ Pagal sąlygą, $F(\theta, t) = 1 - e^{-\theta t}$, $t \geq 0$, o

$$F(\theta, t) = 1 - e^{-\int_0^t h(\theta, s) ds},$$

tai $h(\theta, t) = \theta$, $\dot{h}(\theta, t) = 1$ ir $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 = \frac{1}{\theta}$. Todėl

$$\begin{aligned} \frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} &= \frac{1}{\theta}, \quad I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left| \frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} \right|^2 = \frac{1}{\theta^2}, \quad I_t(\theta) = \frac{t}{a(\theta)} I(\theta) = \frac{t}{\frac{1}{\theta}} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{t}{\theta}, \\ \varphi_t(\theta) &= (I_t(\theta))^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\theta}{t}}; \quad \int_0^t \frac{\dot{h}(\theta, L_s)}{h(\theta, L_s)} dN_s = \frac{1}{\theta} N_t, \quad \int_0^t \dot{h}(\theta, L_s) ds = \int_0^t 1 ds = t, \\ \Delta_t(\theta) &= \varphi_t(\theta) \left(\int_0^t \frac{\dot{h}(\theta, L_s)}{h(\theta, L_s)} dN_s - \int_0^t \dot{h}(\theta, L_s) ds \right) = \sqrt{\frac{\theta}{t}} \left(\int_0^t \frac{1}{\theta} dN_s - \int_0^t 1 ds \right) \\ &= \sqrt{\frac{\theta}{t}} \left(\frac{N_t}{\theta} - t \right) = \frac{1}{\sqrt{\theta t}} (N_t - \theta t). \quad \triangleleft \end{aligned}$$

2) Stebimas eksponentinio skirstinio atstatymo procesas 15 valandų. Gauti tokie tarpiniai atstatymo momentai: $X_1 = 0,0943$, $X_2 = 0,7765$, $X_3 = 0,5447$, $X_4 = 0,0101$, $X_5 = 1,6094$, $X_6 = 2,9957$, $X_7 = 0,9943$, $X_8 = 2,9957$, $X_9 = 1,1087$, $X_{10} = 2,9957$. Naudodami reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,01$, patikrinkime statistines hipotezes $H_0 : \theta = 0,6$ ir $H_1^1 : \theta > 0,6$.

▷ Pagal sąlygą, $\theta_0 = 0,6$, $t = 15$, $N_{15} = 10$, $\alpha = 0,01$.

$$\Delta_t(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{t\theta_0}}(N_t - t\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{15 \cdot 0,6}}(10 - 15 \cdot 0,6) = 0,3333;$$

$$u_{1-\alpha} = u_{0,99} = 2,326.$$

Kadangi $\delta_t^1 = \mathbb{I}(\Delta_t(\theta_0) > u_{1-\alpha})$, gauname, kad

$$\Delta_t(\theta_0) = 0,3333 \leq u_{1-\alpha} = 2,326,$$

todėl priimame $H_0 : \theta = 0,6$. <

3) Atstatymo proceso tarpiniai momentai turi Veibulo skirstinį $X_1 \sim V(\frac{\theta}{2}, 2)$, t. y. $F(\theta, t) = 1 - e^{-\theta \frac{t^2}{2}}$, $t \geq 0, \theta > 0$. Raskime $\varphi_t(\theta)$ ir $\Delta_t(\theta)$.

▷ Pagal sąlygą, $h(\theta, t) = \theta t$, todėl $\dot{h}(\theta, t) = t$. Žinoma, kad $a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2\theta}}$. Vadinas,

$$\frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} = \frac{X_1}{\theta X_1} = \frac{1}{\theta}, \quad I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left| \frac{\dot{h}(\theta, X_1)}{h(\theta, X_1)} \right|^2 = \frac{1}{\theta^2},$$

$$I_t(\theta) = \frac{t}{a(\theta)} I(\theta) = \frac{t}{\sqrt{\frac{\pi}{2\theta}}} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{t}{\theta^2} \sqrt{\frac{2\theta}{\pi}},$$

$$\varphi_t(\theta) = (I_t(\theta))^{-\frac{1}{2}} = \frac{\theta}{\sqrt{t}} \sqrt[4]{\frac{\pi}{2\theta}};$$

$$\Delta_t(\theta) = \varphi_t(\theta) \left(\int_0^t \frac{L_s}{\theta L_s} dN_s - \int_0^t L_s ds \right) = \frac{\theta}{\sqrt{t}} \sqrt[4]{\frac{\pi}{2\theta}} \left(\frac{N_t}{\theta} - \int_0^t L_s ds \right). <$$

4) 3 pavyzdžio tęsinys. Stebimas $V(\frac{\theta}{2}, 2)$ tarpinių atstatymo momentų atstatymo procesas 1 valandą. Gauti tarpiniai atstatymo momentai: 0,1161; 0,0656; 0,0307; 0,1978; 0,0432; 0,1212; 0,0715; 0,0561; 0,1128; 0,0388, t. y. $N_t = 10$, $t = 1$. Imdami $\alpha = 0,05$, patikrinkime statistines hipotezes $H_0 : \theta = 200$ ir $H_1^3 : \theta \neq 200$.

▷

$$\Delta_t(\theta_0) = \frac{\theta_0}{\sqrt{t}} \sqrt[4]{\frac{\pi}{2\theta_0}} \left(\frac{N_t}{\theta_0} - \int_0^t L_s ds \right).$$

$$\begin{aligned} \int_0^t L_s ds &= \sum_{i=1}^{N_{t-}} \int_0^{X_i} s ds - \int_0^{t-T_{N_{t-}}} s ds = \sum_{i=1}^{N_{t-}} \frac{(X_i)^2}{2} - \frac{(t-T_{N_{t-}})^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} (0,1161^2 + 0,0656^2 + 0,0307^2 + 0,1978^2 + 0,0432^2 + 0,1212^2 \\ &\quad + 0,0715^2 + 0,0561^2 + 0,1128^2 + 0,0388^2 + (1 - 0,8538)^2) = 0,0591, \end{aligned}$$

$$\Delta_1(200) = \frac{200}{\sqrt{1}} \sqrt[4]{\frac{3,14159}{2 \cdot 200}} \left(\frac{10}{200} - 0,0591 \right) = -0,5418,$$

$$\delta_t^3 = \mathbb{I}(|\Delta_t(\theta_0)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}});$$

$$\alpha = 0,05, \quad u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96.$$

Gauname, kad

$$|\Delta_t(\theta_0)| = 0,5418 \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96,$$

vadinasi, priimame hipotezę $H_0 : \theta = 200$. $\triangleleft$

Literatūra

- [1] M.G. Akritas, R.A. Johnson. The contiguity of probability measures and asymptotic inference in continuous time stationary diffusions and Gaussian processes with known covariance. *J. Multivariate Anal.*, **12**(1):123–135, 1982.
[https://doi.org/10.1016/0047-259X\(82\)90087-2](https://doi.org/10.1016/0047-259X(82)90087-2).
- [2] L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. Statist.*, **3**:27–98, 1960.
- [3] I.A. Ibragimov, R.Z. Khas'minskii. Local asymptotic normality for non-identically distributed observations. *Theory Probab. Appl.*, **20**(2):246–260, 1976.
<https://doi.org/10.1137/1120032>.
- [4] I.A. Ibragimov, R.Z. Khas'minskii. *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [5] R.A. Johnson, G.G. Roussas. Asymptotically most powerful tests in Markov processes. *An. Math. Stat.*, **40**(4):1207–1215, 1969.
- [6] V. Kanišauskas. Asymptotic parameter estimation for multivariate point processes. *Lith. Math. J.*, **37**(4):352–363, 1997. <https://doi.org/10.1007/BF02465576>.
- [7] V. Kanišauskas. Diskrečiųjų martingalų statistinių modelių lokalus asimptotinis normalumas. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **64**:30–40, 2023.
<https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33592>.
- [8] V. Kanišauskas, K. Kanišauskienė. Tolydaus laiko diskrečiųjų martingalų statistinių modelių asimptotinis įvertinimas. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **65**:22–33, 2024. <https://doi.org/10.15388/LMD.2024.37772>.
- [9] Yu.A. Kutoyants. Locally asymptotic normality for processes of Poisson. *Izv. Ak. Nauk Armyanskoi SSSR. Matematika*, **14**(1):3–20, 1979.
- [10] Yu.A. Kutoyants. *Estimating the Parameters of Random Processes*. Armenian Academy of Sciences, Yerevan, 1980.
- [11] Yu.A. Kutoyants. Estimating the parameters for Poisson type processes. *Izv. Ak. Nauk Armyanskoi SSSR. Matematika*, **19**(3):233–241, 1984.
- [12] Yu.N. Lin'kov. Asymptotic power of statistical criteria for counting processes. (Russian). *Probl. Inf. Transm.*, **17**(3):196–205, 1981. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=\ppi&paperid=1409&option_lang=eng.
- [13] Yu.N. Lin'kov. *Asymptotic Statistical Methods for Stochastic Processes*. American Mathematical Society, 2001.
- [14] G.G. Roussas. *Contiguity of Probability Measures. Some Applications in Statistics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [15] A. Wald. Asymptotic most powerful tests of statistical hypotheses. *An. Math. Stat.*, **12**:1–19, 1941.

SUMMARY

Testing of the hypotheses of the renewal process under local asymptotic normality*V. Kaniškauskas*

The paper deals with a statistical experiment induced by a renewal process with a continuous compensator. Given the local asymptotic normality of probability measures, the asymptotically locally most powerful criteria for testing the simple hypothesis with the complex parametric alternative are found. It is also shown how these hypotheses are practically tested with specific data.

Keywords: renewal process; local asymptotic normality; asymptotically locally most powerful test