Lietuvos matematikos rinkinys, 2019
Lietuvos matematikų draugijos darbai, serija B
https://doi.org/10.15388/LMR.B.2019.15208

ISSN 0132-2818
eISSN 2335-898X
60 tomas, 11–14

Lokalinės ribinės teoremos Borveino algoritmo koeficientams įrodymas santykio metodu

Igoris Belovas[1,2]

[1] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas*
Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
E. paštas: Igoris.Belovas@vgtu.lt

Santrauka. Straipsnyje yra tęsiamas modifikuoto Borveino metodo Rymano dzeta funkcijos reikšmių skaičiavimui tyrimas. Yra pateikiamas naujas lokalinės ribinės teoremos metodo koeficientams įrodymas, taikant Prošano santykio metodą.

Raktiniai žodžiai: lokalinė ribinė teorema, santykio metodas, asimptotinis normalumas.

Įvadas

Darbuose [1, 2] buvo pasiūlyta Borveino metodo Rymano dzeta funkcijos reikšmių skaičiavimui modifikacija bei įrodytos centrinė ir lokalinė ribinės teoremos metodo koeficientams. Algoritmo modifikacija, grindžiama koeficientų asimptotine išraiška, pasirodė daugiau nei tris kartus greitesnė, nei originalus algoritmas [2]. Borveino metodas Rymano dzeta funkcijos reikšmių skaičiavimui remiasi alternuojančios eilutės (2) konvergavimu [3]. Jei $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + it$, $\sigma \geqslant 1/2$ ir

$$d_{nk} = n \sum_{j=0}^{k} \frac{(n+j-1)!4^j}{(n-j)!(2j)!}, \quad n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{1}$$

tai Rymano dzeta funkcija

$$\zeta(s) = \frac{1}{d_{nn}(1-2^{1-s})} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (d_{nn} - d_{nk})}{(k+1)^s} + \gamma_n(s), \tag{2}$$

kur

$$|\gamma_n(s)| \leqslant \frac{3}{(3+\sqrt{8})^n} \frac{(1+2|t|)e^{\frac{\pi|t|}{2}}}{|1-2^{1-s}|}.$$

Dideliems n koeficientus d_{nk} (1) skaičiuoti tiesiogiai yra sunku (dėl faktorialų apibrėžime). Šiai problemai spręsti buvo įvesta metodo modifikacija. Tegu $c_{nk} = 1 - d_{nk}/d_{nn}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Turime

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k c_{nk}}{(k+1)^s} + \gamma_n(s). \tag{3}$$

Tegu

$$u_{nk} = n\frac{(n+k-1)!4^k}{(n-k)!(2k)!}, \quad n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{4}$$

Dabar galime skaičiuoti d_{nk} rekurentiškai, t.y. $d_{nk} = d_{n,k-1} + u_{nk}$, $d_{n0} = 1$, ir

$$c_{nk} = 1 - \sum_{i=0}^{k} a_{ni},$$

kur

$$a_{nk} = \frac{u_{nk}}{\sum_{i=0}^{n} u_{ni}}. \tag{5}$$

Tegu A_n yra sveikaskaitis atsitiktinis dydis ir

$$P(A_n = k) = a_{nk}, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{6}$$

Straipsnyje [2] buvo gauta lokalinė ribinė teorema modifikuoto Borveino metodo koeficientams, parodanti, kad a_{nk} skaičiai yra asimptotiškai normalūs. Teorema buvo įrodyta „tiesiogiai“, taikant Stirlingo formulę. Tačiau asimptotinis normalumas gali būti išvestas trumpesniu ir subtilesniu keliu, pasitelkiant Prošano pasiūlytą santykio metodą [4].

Lokalinė ribinė teorema a_{nk} koeficientams

Suformuluokime lokalinę ribinę teoremą (visos ribos straipsnyje, jei nepažymėta kitaip, skaičiuojamos kai $n \to \infty$).

1 teorema. *Jei*

$$\mu_n = \frac{n}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_n^2 = \frac{n\sqrt{2}}{8}, \tag{7}$$

tai visiems k, tokiems, kad

$$|k - \mu_n| = o\big(\sigma_n^{4/3}\big), \tag{8}$$

koeficientams a_{nk} (5) *turime*

$$a_{nk} \sim \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\biggl(-\frac{(k-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\biggr). \tag{9}$$

Įrodymas. Nagrinėsime santykį

$$\frac{P(A_n = k+1)}{P(A_n = k)} = \frac{a_{n,k+1}}{a_{nk}}. \tag{10}$$

Iš apibrėžimų (4) ir (5) gauname

$$\frac{P(A_n = k+1)}{P(A_n = k)} = \frac{u_{n,k+1}}{u_{nk}} = 4\frac{(n+k)(n-k)}{(2k+1)(2k+2)}. \tag{11}$$

Pažymėkime

$$x = \frac{k-\mu_n}{\sigma_n}. \tag{12}$$

Pastebime (8), kad

$$|x| = o\bigl(\sigma_n^{1/3}\bigr) = o\bigl(\sqrt[6]{n}\bigr). \tag{13}$$

Įstate $k = \mu_n + \sigma_n x$ į (11), gauname

$$\begin{aligned}
\frac{P(A_n = \mu_n + \sigma_n x + 1)}{P(A_n = \mu_n + \sigma_n x)} &= \frac{2(n+\mu_n+\sigma_n x)(n-\mu_n-\sigma_n x)}{(1+2\mu_n+2\sigma_n x)(1+\mu_n+\sigma_n x)} \\
&= \frac{2n^2}{(1+n\sqrt{2})(1+n/\sqrt{2})}\,\frac{(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2\sqrt[4]{2}\sqrt{n}})(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{x}{2\sqrt[4]{2}\sqrt{n}})}{(1+\frac{x\sqrt{n}}{2\sqrt[4]{2}(1+n/\sqrt{2})})(1+\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt[4]{2}(1+n\sqrt{2})})} \\
&= \frac{2n^2(1+\frac{1}{\sqrt{2}})(1-\frac{1}{\sqrt{2}})}{n^2+\frac{3}{\sqrt{2}}n+1}\,\frac{(1+\frac{\sqrt{2}-1}{4}x\delta_n)(1-\frac{\sqrt{2}+1}{4}x\delta_n)}{(1+\frac{1}{4}x\delta_n\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{n}})(1+\frac{1}{4}x\delta_n\frac{1}{1+\frac{1}{n\sqrt{2}}})} \\
&= \frac{(1+\frac{\sqrt{2}-1}{4}x\delta_n)(1-\frac{\sqrt{2}+1}{4}x\delta_n)}{(1+\frac{1}{4}x\delta_n)^2}\biggl(1+O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\biggr),
\end{aligned} \tag{14}$$

kur

$$\delta_n = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma_n}. \tag{15}$$

Pastebime, kai $n \to \infty$, tai $\delta_n \to 0$. Įvedę normavimą $X_n = (A_n - \mu_n)/\sigma_n$ ir pažymėję $P(X_n = x) = f_n(x)$, galime užrašyti santykį (14) kaip

$$\frac{f_n(x+\delta_n)}{f_n(x)} = \frac{(1+\frac{\sqrt{2}-1}{4}x\delta_n)(1-\frac{\sqrt{2}+1}{4}x\delta_n)}{(1+\frac{1}{4}x\delta_n)^2}\biggl(1+O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\biggr). \tag{16}$$

Logaritmuojant, gauname

$$\begin{aligned}
&\ln f_n(x+\delta_n) - \ln f_n(x) \\
&\quad = \ln\Bigl(1+\frac{\sqrt{2}-1}{4}x\delta_n\Bigr) + \ln\Bigl(1-\frac{\sqrt{2}+1}{4}x\delta_n\Bigr) - 2\ln\Bigl(1+\frac{1}{4}x\delta_n\Bigr) + O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr).
\end{aligned} \tag{17}$$

Padalíję formulės (17) abi puses iš δ_n ir atsižvelgę į (13), gauname

$$\begin{aligned}
\frac{\ln f_n(x+\delta_n) - \ln f_n(x)}{\delta_n} &= \biggl(\frac{\sqrt{2}-1}{4}x - \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{32}x^2\delta_n + O\bigl(x^3\delta_n^2\bigr)\biggr) \\
&\quad + \biggl(-\frac{\sqrt{2}+1}{4}x - \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{32}x^2\delta_n + O\bigl(x^3\delta_n^2\bigr)\biggr) \\
&\quad - 2\biggl(\frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2\delta_n + O\bigl(x^3\delta_n^2\bigr)\biggr) + O(\delta_n) \\
&= -x - \frac{1}{8}x^2\delta_n + O(\delta_n).
\end{aligned} \tag{18}$$

Perėję prie ribos, kai $\delta_n \to 0$, formulės (18) kairėje pusėje turime ribinio tankio logaritminę išvestinę $(\ln f(x))' = -x$, kas, savo ruožtu, duoda mums $f(x) = C\exp(-x^2/2)$, kur konstanta C turi būti lygi $1/\sqrt{2\pi}$, nes $f(x)$ yra tankio funkcija. Taigi, kai $n \to \infty$, atsitiktinis dydis $X_n = (A_n - \mu_n)/\sigma_n$ turi savo ribiniu dėsniu standartinį normalųjį. Kitaip sakant, atsitiktinis dydis A_n yra asimptotiškai normalus su vidurkiu μ_n ir standartiniu nuokrypiu σ_n, kas ir baigia teoremos įrodymą. $\square$

Literatūra

[1] I. Belovas. A central limit theorem for coefficients of the modified Borwein method for the calculation of the Riemann zeta-function. *Lith. Math. J.*, **59**(1), 2019. https://doi.org/10.1007/s10986-019-09421-4.

[2] I. Belovas and L. Sakalauskas. Limit theorems for the coefficients of the modified Borwein method for the calculation of the Riemann zeta-function values. *Colloq. Math.*, **151**(2):217–227, 2018. https://doi.org/10.4064/cm7086-2-2017.

[3] P. Borwein. An efficient algorithm for the Riemann Zeta function. In *Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis (Limoges, 1999)*, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, pp. 29–34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[4] M. A. Proschan. The normal approximation to the binomial. *Am. Stat.*, **62**(1):62–63, 2008. https://doi.org/10.1198/000313008X267848.

SUMMARY

Local limit theorem for coefficients of modified Borwein's algorithm, proved by the ratio method

I. Belovas

The paper continues the research of the modified Borwein method for the evaluation of the Riemann zeta-function. It provides a different perspective on the derivation of the local limit theorem for coefficients of the method. The approach is based on the ratio method, proposed by Proschan.

Keywords: local limit theorem, ratio method, asymptotic normality.